Πυκνότητα Ρεύματος

κλασσικά

$$\rho(\vec r,t) = e|\psi(\vec r,t)|^2 \leftarrow e\,n(\vec r,t)$$

πυκνότητα φορτίου — πυκνότητα πιθανότητας — πυκνότητα ηλεκτρονίων

Διατήρηση φορτίου ⇒ εξίσωση συνέχειας

τοπική μεταβολή σε όγκο δV = ροή φορτίου μέσω επιφάνειας δS

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec r,t) = -\vec\nabla\cdot\vec J(\vec r,t)$$

πυκνότητα ρεύματος

ή $$\int_{\delta V}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec r,t)\,dV = -\int_{\delta V}\vec\nabla\cdot\vec J\,dV$$

Gauss

ή $$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_{\delta V}\rho(\vec r,t)\,dV}_{\text{φορτίο σε όγκο δV}} = -\underbrace{\int_{\delta S}\vec J\cdot d\vec S}_{\text{ροή φορτίου μέσω dS}}$$

Κλασσικά

$$\vec J \sim n(\vec r,t)\,e\vec v$$

$$n(\vec r,t)\,e\frac{\vec P}{m}$$

Κβαντικά

$\vec J \rightarrow$ τελεστής ερμιτιανός

$\vec J \rightarrow$?

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = e\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = e\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec r)\right]\psi$$

πολλαπλασιάζουμε με ψ^*

$$i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\nabla^2\psi + \psi^*V(\vec r)\psi$$

c.c.

$$-i\hbar\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi\nabla^2\psi^* + \psi V(\vec r)\psi^*$$

$V(\vec r)$ − πραγματικό

Αφαιρούμε ⇒

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{ie\hbar}{2m}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right)$$

$$= \frac{ie\hbar}{2m}\vec\nabla\cdot\left(\psi^*\vec\nabla\psi - \psi\vec\nabla\psi^*\right) = -\vec\nabla\cdot\vec J$$

$$\boxed{\vec J = -\frac{ie\hbar}{2m}\left(\psi^*\vec\nabla\psi - \psi\vec\nabla\psi^*\right)}$$

τελεστής πυκνότητας ρεύματος είναι ερμιτιανός

απλή αντικατάσταση λάθος

$$e\frac{\vec P}{m}n(\vec r) \rightarrow \cancel{e\psi^*\frac{\vec P}{m}\psi}$$

δεν είναι ερμιτιανός

Σε 1-διάσταση

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

α) Συνέχεια πιθανότητας $|\psi|^2$

$\Rightarrow$ συνέχεια ψ (όχι απειρισμοί)

β) Συνέχεια ρεύματος $\vec{J}(\vec{r})$

$\Rightarrow$ συνέχεια $\partial_x\psi$

Αν $m(\vec{r}) \Rightarrow$ συνέχεια $\frac{1}{m}\partial_x\psi$

Εκτός αν $V \to \delta(x)$

$$\partial_x\psi(x=0^+) - \partial_x\psi(x=0^-) = \frac{2m}{\hbar}\psi(0)$$

ολοκληρώνοντας εξ. Sch. $\int_{0^-}^{0^+}dx$

ασυνέχεια στην παράγωγο

$\psi(0) \neq 0$ και συνεχής

πυκνότητα ρεύματος

1. Ελεύθερο σωματίδιο σε 3-δ

$$\psi \sim \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} \qquad \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\vec{J} = -\frac{ie\hbar}{2m}(2i\vec{k})|\psi|^2 = e\frac{\hbar\vec{k}}{m}|\psi|^2$$

2. Περιοδικές οριακές συνθήκες

$$\psi \to \sqrt{\frac{1}{\Omega}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}$$

$\Omega \leftarrow$ όγκος

$$\vec{J} = e\frac{\hbar\vec{k}}{m}\frac{1}{\Omega}$$

3. Άπειρο πηγάδι εύρους L

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-i\omega_n t} \qquad E_n = \hbar\omega_n = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{2mL^2}$$

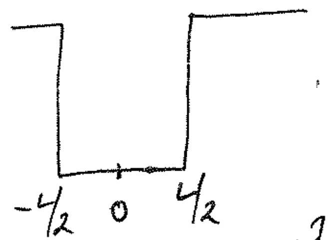
$\vec{J} = 0$ διότι $\sin\frac{n\pi x}{L} \to \frac{1}{2i}\left\{e^{\frac{in\pi x}{L}} - e^{-\frac{in\pi x}{L}}\right\}$

στάσιμο κύμα $\to$ συνδυασμός δύο αντίθετα οδεύοντων κυμάτων

4. $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2)$ σε άπειρο πηγάδι

$\vec{J} \neq 0$ Μη στάσιμες καταστάσεις δίνουν ρεύμα.

Διπολική ροπή



$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$$

$$\vec{d} = e\overset{\swarrow \text{τελεστής}}{\vec{r}} \Rightarrow d = ex \text{ - 1-διάστατα}$$

$\langle d \rangle$ - μέση τιμή

$\langle n|d|n\rangle = 0$ λόγω συμμετρίας

$$\langle n|d|n\rangle = e\int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{u_n^*(x)\, x\, u_n(x)}_{\text{περιττή}} = 0$$

$\langle \psi|d|\psi\rangle \neq 0$ αν ψ - όχι $\begin{cases}\text{άρτια} \\ \text{περιττή}\end{cases}$