ΠΕΙΡΑΜΑ IV

Ροπή Αδράνειας Στερεού Σώματος

Σκοπός πειράματος

Στο πείραμα αυτό θα μελετήσουμε την περιστροφική κίνηση που εκτελεί ένα υλικό σημείο ή ένα στερεό σώμα, σταθερού μεγέθους και σχήματος, με την επίδραση σταθερής ροπής. Θα εξετάσουμε λοιπόν πειραματικά τα εξής:

- Την εξάρτηση της γωνιακής επιτάχυνσης υλικού σημείου από την απόσταση του από τον άξονα περιστροφής, εισάγοντας την έννοια της ροπής αδράνειας.
- Την εξάρτηση της ροπής αδράνειας διαφόρων στερεών σωμάτων από τη θέση του άξονα περιστροφής, αφού πρώτα υπολογίσουμε πειραματικά τη ροπή αδράνειας του κάθε στερεού σώματος που θα χρησιμοποιήσουμε.
- Τη μεταβολή της ροπής αδράνειας ενός στερεού σώματος κατά την παράλληλη μετατόπιση του άξονα περιστροφής του (απόδειξη του νόμου του Steiner).

Θεωρητικό υπόβαθρο

- Κυκλική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
- Ροπη αδράνειας στερεού σώματος
- Υπολογισμός ροπής αδράνειας
- Νόμος του Steiner

Για την κατανόηση και σωστή τέλεση του πειράματος θα πρέπει υποχρεωτικά να γνωρίζετε πριν κάνετε το πείραμα τη θεωρία που παρουσιάζεται στις ακόλουθες ενότητες του βιβλίου Φυσική των Serway & Jewett: **Μ4, Μ6, Μ10.**

Συνοπτική Θεωρία

Κυκλική Κίνηση
Κατ' αναλογία με την ευθύγραμμη κίνηση, εάν ένα σώμα εκτελεί περιστροφική κίνηση μπορούμε να ορίσουμε την στιγμιαία και μέση γωνιακή του ταχύτητα ως

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

και

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

όπου $\Delta\theta$ είναι η γωνία που διαγράφει το κινητό σε χρόνο Δt.
Αντίστοιχα ορίζεται και η στιγμιαία και μέση γωνιακή επιτάχυνση ως

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Από τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να πάρουμε τις εξισώσεις που διέπουν τη σχέση μεταξύ της γωνιακής ταχύτητας, γωνιακής επιτάχυνσης και γωνίας που διαγράφει η επιβατηγή ακτίνα στην ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση:

$$\omega = \omega_0 + at$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Ροπή Δύναμης και Ροπή Αδράνειας

Εάν ασκηθεί μια δύναμη σε ένα στερεό σώμα από το οποίο διέρχεται ένας σταθερός άξονας τότε το σώμα αυτό θα περιστραφεί. Η δύναμη αυτή ασκεί μια ροπή $\vec{\tau}$ στο σώμα η οποία ορίζεται ως

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

όπου $\vec{F}$ είναι η ασκούμενη δύναμη και $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα που ορίζεται από τον άξονα περιστροφής προς το σημείο εφαρμογής της δύναμης και είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής.

Οπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση η ροπή είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται πάντοτε σε σχέση με έναν άξονα (ή σημείο).

Η εφαρμογή μιας ροπής σε ένα σώμα θα έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή του, όπως η εφαρμογή μίας δύναμης έχει ως αποτέλεσμα την επιτάχυνση ενός σώματος.

Κατ' αναλογία με το 2^o Νόμο του Newton για την ευθύγραμμη κίνηση, η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}$ συνδέεται με τη ροπη $\vec{\tau}$ μέσω της σχέσης,

$$\vec{\tau} = I\vec{a}$$

Η σταθερά αναλογίας I ονομάζεται Ροπή Αδράνειας και ορίζεται ως

$$I = \int r^2 dm$$

όπου r είναι η απόσταση του κάθε στοιχείου μάζας dm του σώματος από τον άξονα περιστροφής.

Εάν το σώμα αποτελείται από πολλαπλά μέρη μάζας m_i που βρισκονται σε απόσταση r_i από τον άξονα περιστροφής τότε η ροπή αδράνειάς του θα είναι

$$I = \sum_i r_i^2 m_i = \sum_i I_i$$

οπου I_i είναι οι ροπές αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του κάθε επιμέρους τμήματος.

Σχετικά με τις ροπές αδράνειας ισχύει και το «Θεώρημα των παράλληλων αξόνων» ή «Νόμος του Steiner» σύμφωνα με το οποίο εάν γνωρίζουμε τη ροπή αδράνειας ενός σώματος μάζας Μ ως προς έναν άξονα α που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ως προς έναν άξονα β, παράλληλο του α, που απέχει απόσταση d, μέσω τη σχέσης

$$I_\beta = I_\alpha + Md^2$$

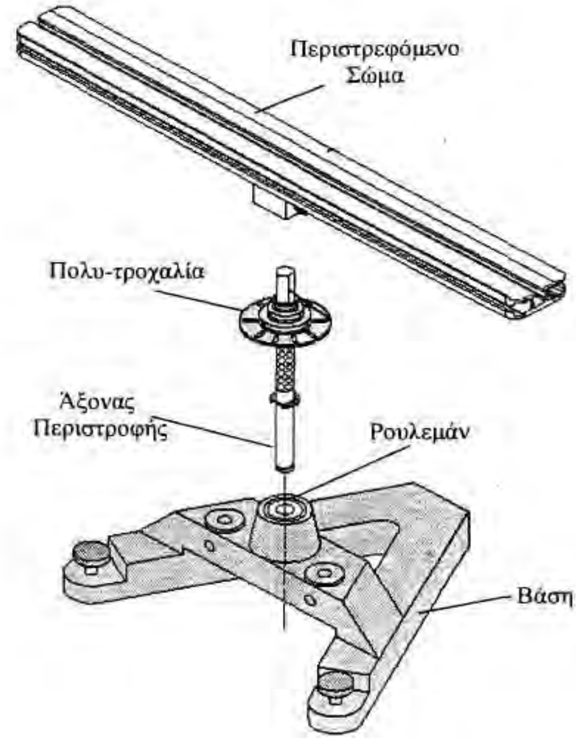
Πειραματική διάταξη

1.1 Περιγραφή της διάταξης

Για να βρούμε πειραματικά τη ροπή αδράνειας, Ι, ενός σώματος εφαρμόζουμε μια γνωστή ροπή, τ, στο σώμα και μετράμε την γωνιακή επιτάχυνση, α, που οφείλεται στην ροπή αυτή. Επειδή $\tau = I\alpha$ η ροπή αδράνειας θα είναι:

$$I = \frac{\tau}{\alpha} \tag{1}$$

Για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής χρησιμοποιούμε το περιστρεφόμενο σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα 1:

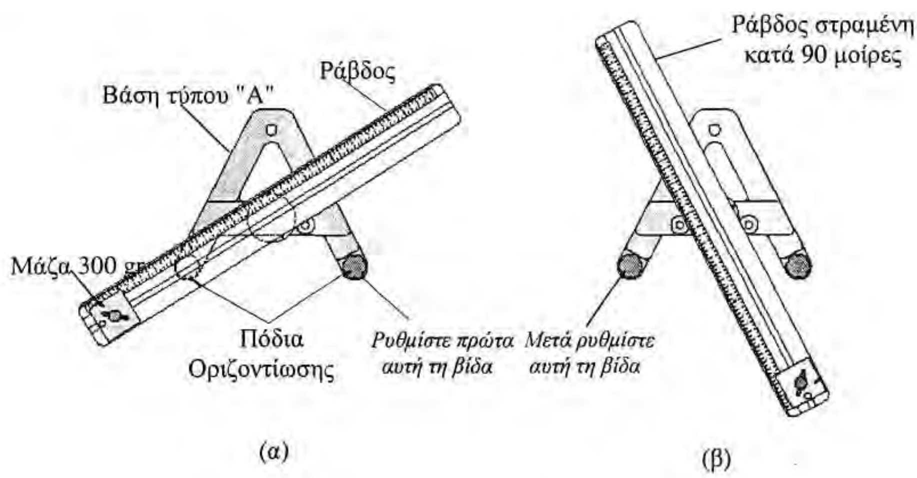


Σχήμα 1: Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιείται για την περιστροφή των διαφόρων σωμάτων.

Η διάταξη αποτελείται από μία σταθερή βάση σχήματος «Α» με ρουλεμάν χαμηλής τριβής το οποίο χρησιμοποιείται για την περιστροφή διαφόρων αντικειμένων μέσω ενός κατακόρυφου άξονα περιστροφής. Σε κάποιο σημείο του άξονα αυτού είναι στερεωμένη μία πολύ-τροχαλία με τρεις εσοχές διαφορετικής ακτίνας. Το σώμα το οποίο θέλουμε να περιστρέψουμε στερεώνεται στο πάνω μέρος του άξονα αυτού.

1.2 Οριζοντίωση της διάταξης

Πριν όμως γίνει οποιαδήποτε μέτρηση πρέπει να οριζοντιωθεί η διάταξη προς αποφυγή σφαλμάτων στις μετρήσεις. Προς τον σκοπό αυτό ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα, που φαίνονται και στο Σχήμα 2:



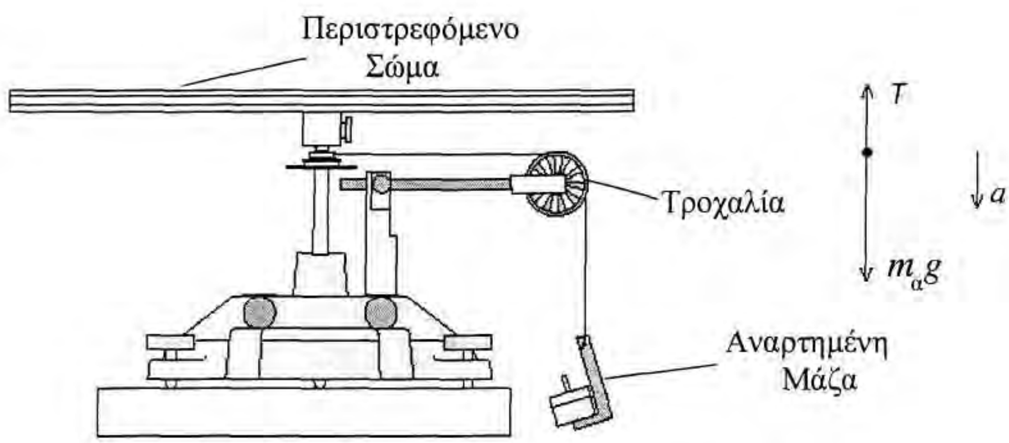
Σχήμα 2: Η διαδικασία οριζοντίωσης της διάταξης (κάτοψη της διάταξης).

1. Η ράβδος στερεώνεται στον κατακόρυφο άξονα περιστροφής.
2. Μία μάζα των 300g τοποθετείται σε ένα από τα δύο άκρα της ράβδου.
3. Η αριστερή βίδα του Σχ. 2 ξεβιδώνεται πλήρως ούτως ώστε να πλαγιάσει η διάταξη.
4. Η δεξιά βίδα ρυθμίζεται μέχρις ότου το κομμάτι της ράβδου στο οποίο είναι στερεωμένη η μάζα βρεθεί ακριβώς επάνω από την αριστερή βίδα (Σχ. 2α).
5. Η ράβδος περιστρέφεται κατά 90 μοίρες για να γίνει παράλληλη με την μία μεριά του «Α» της βάσης (Σχ. 2β).
6. Η αριστερή βίδα ρυθμίζεται μέχρις ότου η ράβδος να παραμείνει ακίνητη στη θέση αυτή. Αν η οριζοντίωση έχει γίνει σωστά η ράβδος θα πρέπει να παραμένει ακίνητη και σε οποιαδήποτε άλλη θέση.

1.3 Λήψη μετρήσεων

Για να εφαρμοστεί μία γνωστή ροπή στο σώμα προς περιστροφή ακολουθείται η εξής διαδικασία:

1. Αρχικά προσδένεται ένα νήμα στην πολύ-τροχαλία και τυλίγεται γύρω από μία εσοχή της. Στην άλλη άκρη του νήματος αναρτάται μία γνωστή μάζα, m_a, μέσω μιας άλλης τροχαλίας η οποία στερεώνεται στην βάση (Σχ. 3).



Σχήμα 3: Η εφαρμογή μιας γνωστής ροπής στρέψης στη περιστρεφόμενη διάταξη

2. Αν η μάζα αφεθεί ελεύθερη να κινηθεί προς τα κάτω, τότε το αντικείμενο θα περιστραφεί με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, a, λόγω της ροπής, τ ,της τάσης του νήματος, T:

$$\tau = r_{\varepsilon\sigma} T \tag{2}$$

όπου $r_{\varepsilon\sigma}$ είναι η ακτίνα της κυλινδρικής εσοχής στην οποία τυλίγεται το νήμα.

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τις δυνάμεις που ενεργούν στην αναρτημένη μάζα προκύπτει (Σχ. 3):

$$\sum F = m_a g - T = m_a \alpha \tag{3}$$

όπου α είναι η γραμμική επιτάχυνση που αποκτάει η μάζα. Η γραμμική επιτάχυνση συνδέεται με την γωνιακή επιτάχυνση μέσω της σχέσης:

$$\alpha = a r_{\varepsilon\sigma} \tag{4}$$

Οπότε λύνοντας την (3) ως προς T και χρησιμοποιώντας την (2) προκύπτει:

$$T = m_a\left(g - a r_{\varepsilon\sigma}\right) \tag{5}$$

Επομένως μετρώντας τη γωνιακή επιτάχυνση a του σώματος μπορούμε να υπολογίσουμε την τάση του νήματος και από αυτή μέσω της σχέσης (2) τη ροπή λόγω της τάσης. Στη συνέχεια μέσω της σχέσης (1) υπολογίζουμε τη ροπή αδρανειας του σώματος.

3. Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση, η γωνιακή του θέση, θ, κάθε χρονική στιγμή, t, θα δίδεται από τη σχέση:

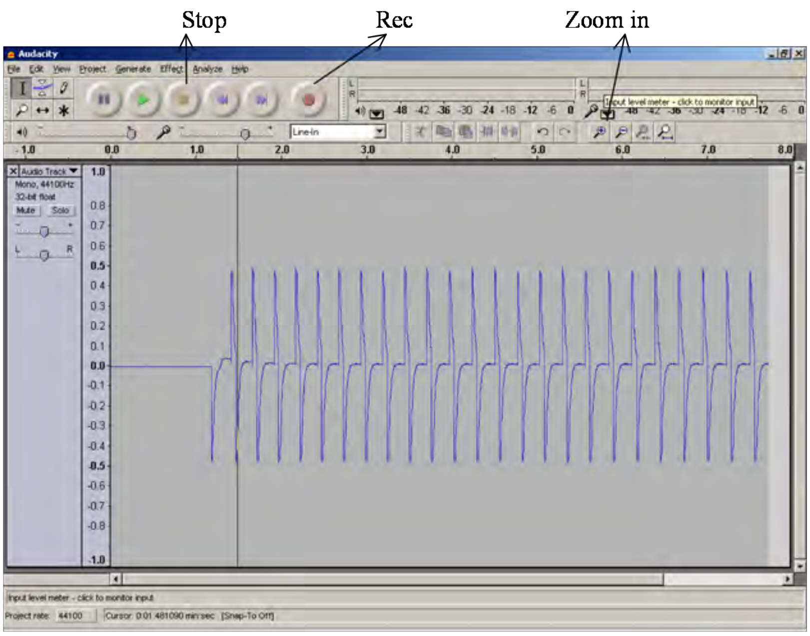
$$\theta = \frac{1}{2} a t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \tag{6}$$

Όπου θ_0 η αρχική γωνία, ω_0 η αρχική γωνιακή ταχύτητα και a η γωνιακή επιτάχυνση.

Επομένως η γωνιακή επιτάχυνση a μπορεί να υπολογισθεί από την κλίση του διαγράμματος $(\theta - \omega_0 t) - t$ εάν γνωρίζουμε την αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0, του διαγράμματος $\theta/t - t$.

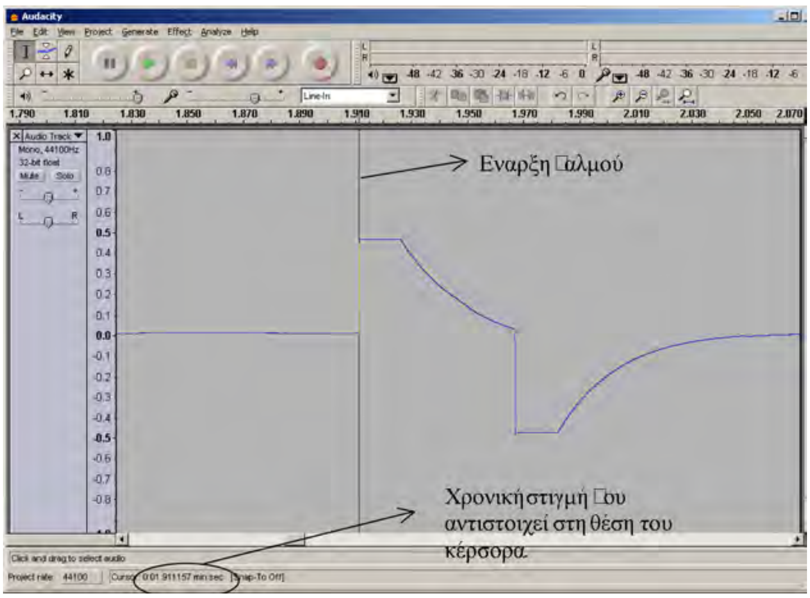
4. Η μέτρηση της γωνιακής επιτάχυνσης ενός σώματος γίνεται μέσω φωτοαντίστασης η οποία ανιχνεύει τις χρονικές στιγμές που οι σχισμές της πολυτροχαλίας περνούν πάνω από μια πηγή LED. Η χρονοσειρά αυτή καταγράφεται μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή.

5. Αρχικά κρατάμε την τροχαλία σταθερή και αρχίζουμε την καταγραφή της κίνησης με το πλήκτρο ‘rec’. Τότε αφήνουμε τη μάζα ελεύθερη. Μόλις σταματήσει η κίνηση σταματάμε την καταγραφή με το πλήκτρο ‘STOP’ (Σχ. 4).



Σχήμα 4: Το βασικό παράθυρο διαλόγου του προγράμματος επεξεργασίας της κυματομορφής.

6. Στη συνέχεια στην οθόνη του υπολογιστή έχουμε μία σειρά παλμών οι οποίοι αντιστοιχούν στο πέρασμα της κάθε σχισμής της τροχαλίας πάνω από τη φωτεινή πηγή. Αρχικά μεγενθύνουμε ολόκληρη την κυματομορφή (‘View’ → ‘Fit Vertically’ ή Ctrl + Shift +F). Επιλέγουμε τον πρώτο παλμό και τον μεγενθύνουμε (πλήκτρο ‘ZOOM IN’ ή Ctrl + 1) ώστε να φαίνεται καθαρά η έναρξή του. Τοποθετούμε τον κέρσορα στην αρχή του παλμού και καταγράφουμε το χρόνο έναρξης από το κάτω μέρος της οθόνης (εάν η γραμμή δεν συμπίπτει με την αρχή του παλμού κάνουμε μεγαλύτερη μεγένθυση ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα).
   Το σφάλμα του χρόνου δίνεται από τη χρονική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων (η μεγέθυνση θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να φαίνονται τα μεμονωμένα σημεία των μετρήσεων).



Σχήμα 5: Παράδειγμα μέτρησης της χρονικής στιγμής της έναρξης του παλμού.

7. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για όλους τους παλμούς κατά τη διάρκεια της κίνησης.

   Η κυματομορφή μπορεί να εκτυπωθεί καθώς και να αποθηκευθεί υπό τη μορφή αρχείου κειμένου για περαιτέρω επεξεργασία (πηγαίνουμε στο menu File, και επιλέγουμε Save).

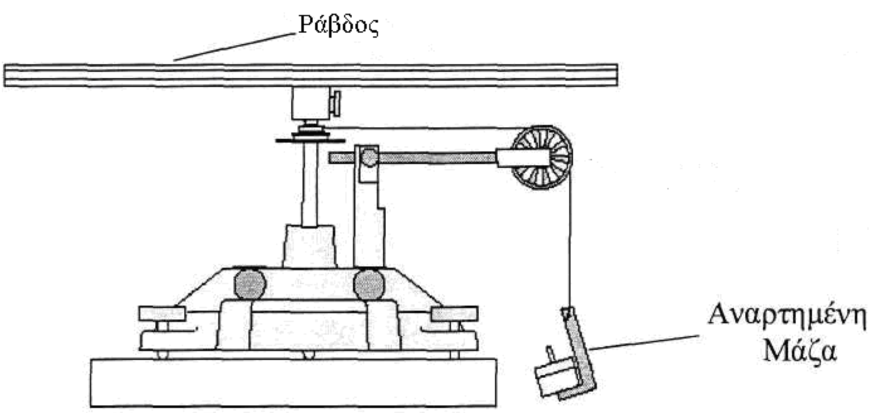
   Δεδομένου ότι η τροχαλία έχει 10 σχισμές, κάθε διαδοχικός παλμός θα αντιστοιχεί σε γωνία $\theta = n\frac{2\pi}{10}$ από την αρχή της κίνησης (όπου n ο αριθμός του παλμού). Επομένως από το διάγραμμα ${}^{\theta}\!/_{t} - t$ και εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων μπορύμε να υπολογίσουμε τη γωνιακή επιτάχυνση α.

Πειραματική διαδικασία

Α′ Μέρος: Ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της

Στο μέρος αυτό θα υπολογιστεί πειραματικά η ροπή αδράνειας μίας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.

Η διάταξη που χρησιμοποιείται φαίνεται στο Σχήμα 6:



Σχήμα 6. Διάταξη μέτρησης ροπής αδράνειας ράβδου.

1. Πριν την πραγματοποίηση κάθε μέτρησης θα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι η διάταξη είναι οριζοντιωμένη. Για να το κάνουμε αυτό βεβαιωνόμαστε ότι δεν ασκείται κάποια δύναμη στη ράβδο και παίρνουμε μια σειρά μετρήσεων δίνοντάς της μία ώθηση. Στη συνέχεια ελέγχουμε τη χρονική απόσταση των παλμών. Εαν οι παλμοί ισαπέχουν τότε η ράβδος είναι οριζοντιωμένη, σε αντίθετη περίπτωση θα πρέπει να επαναληφθεί η διαδικασία οριζοντίωσης.

2. Όπως φαίνεται στο Σχ 6, στο ελεύθερο άκρο του νήματος προσδένεται μια μάζα, έστω m_a. Όταν αφήνεται η μάζα αυτή, η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται και καταγράφονται οι χρόνοι για τις διαδοχικές γωνίες των σχισμών της πολυτροχαλίας.
3. Αρχικά μετράμε τη μάζα, Μ, της ράβδου με την ηλεκτρονική ζυγαριά, καθώς και το μήκος της με έναν χάρακα.
4. Μετρούμε τη διάμετρο, $D_{εσ}$, της εσοχής 5 φορές με το διαστημόμετρο και υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση. Καταγράφουμε τις μετρήσεις σε Πίνακα της μορφής:

Πίνακας 1

α/α	**Διάμετρος D ±δD**
1	
...	...
Μέση Τιμή ($\overline{D}$)	....
Τυπική Απόκλιση ($σ_D$)	

5. Στη συνέχεια προσδένεται ένα μη εκτατό νήμα στην μεσαία εσοχή της πολύ-τροχαλίας.
6. Αναρτούμε στο νήμα μια μάζα την οποία πρώτα έχουμε ζυγίσει (η μάζα του άγκιστρου είναι 1.5gr).
7. Αφήνουμε τη μάζα να πέσει και καταγράφουμε την περιστροφή της πολυ-τροχαλίας όπως περιγράφηκε στη παράγραφο 1.3.

   Αγνοούμε τις πρώτες 10 μετρήσεις και υπολογίζουμε τη χρονική διαφορά (t-t_0) της κάθε μέτρησης από την 11^η μέτρηση (δηλ. **αφαιρούμε από κάθε μέτρηση του χρόνου t_i την 11^η μέτρηση t_0**).
   Με αυτό τον τρόπο θεωρούμε ότι η 11^η μέτρηση αντιστοιχεί σε χρόνο t=0 sec, και γωνία θ=0 rad.

   Σημείωση: το σφάλμα του χρόνου ισούται με τη χρονική απόσταση δύο διαδοχικών σημείων του παλμού.

   Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας σε Πίνακα της μορφής

Πίνακας 2

α/α	**θ**	**t±δt**	**t-t$_o$ ±δ(t-t$_o$)**	**θ/(t-t$_o$) ±δ(θ/(t-t$_o$))**

8. Λύνοντας την σχέση (6) ως προς θ/t και λαμβάνοντας υπ ' όψιν πως για $t_o = 0$, θ = 0 προκύπτει ότι

$$\frac{\theta}{t-t_0} = \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)+\omega_0$$

9. Συνεπώς κάνοντας την γραφική παράσταση του $\theta/(t\text{-}t_0)$ συναρτήσει του χρόνου $(t\text{-}t_0)$ από το σημείο που θεωρούμε ως αρχή της κίνησης, η κλίση, b και η διατομή c θα είναι :

$$b = \frac{1}{2}a \Rightarrow a = 2b$$

$$c = \omega_0$$

Οπότε , για να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση αρκεί να υπολογιστεί η κλίση της $\theta/(t\text{-}t_0) = f(t)$ με τη Μεθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων.

9. Γνωρίζοντας την τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης υπολογίζεται από την σχέση (5) η τάση του νήματος, T.

Δεδομένης της ακτίνας $r_{\varepsilon\sigma}$ και της τάσης του νήματος, από τη σχέση (2) υπολογίζεται η ροπή της τάσης.

10. Συνεπώς η ροπή αδράνειας της ράβδου μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση (1).

11. Να υπολογίσετε τη θεωρητική τιμή της ροπής αδράνειας της ράβδου και να τη συγκρίνετε με αυτή που μετρήσατε πειραματικά.

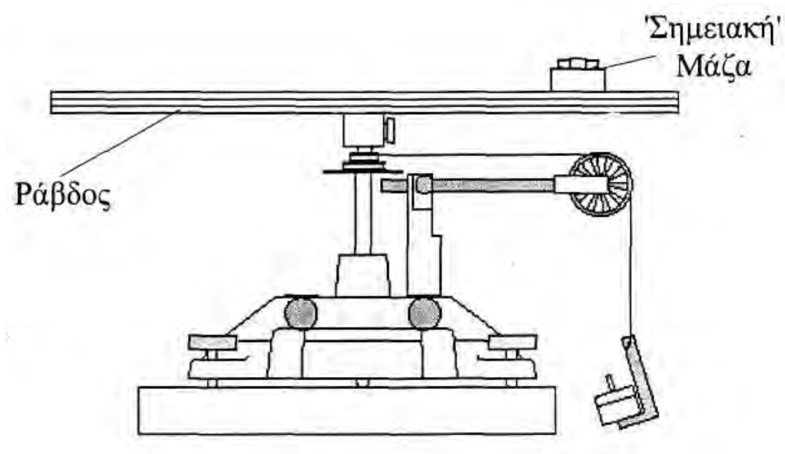
Β′ Μέρος: Ροπή αδράνειας σημειακής μάζας – Νόμος του Steiner

Σκοπός του μέρους αυτού είναι να αποδειχθεί πειραματικά η σχέση ανάμεσα στη ροπή αδράνειας υλικού σημείου Ι και στην απόστασή του από τον άξονα περιστροφής, d, κάνοντας μόνο την υπόθεση ότι είναι της μορφής:

$$I = Kd^n \qquad (7)$$

όπου Κ μία σταθερά.

Η διάταξη που χρησιμοποιείται για την εκτέλεση του πειράματος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



Σχήμα 7: Διάταξη μέτρησης ροπής αδράνειας σημειακής μάζας.

1. Αρχικά μία μάζα, έστω $m_α$, προσαρμόζεται πάνω στη ράβδο (η μάζα θεωρείται σημειακή) σε κάποια απόσταση, d, από τον άξονα περιστροφής.
2. Ζυγίζουμε τη μάζα με τον ηλεκτρονικό ζυγό.
3. Τυλίγουμε ένα μη εκτατό νήμα στη μεσαία εσοχή της πολύ-τροχαλίας και στο ελεύθερο ακρό του κρεμάμε μία μάζα (την οποία έχουμε προηγουμένως ζυγίσει).
4. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέτρησης της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος. Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας σε Πίνακα αντίστοιχο του Πίνακα 2, και πάλι αγνοώντας τους πρώτους 10 παλμούς.

Πίνακας 3

α/α	θ	t±δt	Δt±δ(Δt)	θ/Δt±δ(θ/Δt)

5. Υπολογίζουμε την τιμή και το σφάλμα της ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου-σημειακής μάζας όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο μέρος.

6. Τέλος υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας της σημειακής μάζας μέσω της σχέσης:

$$I_{μάζας} = I_{συστ} - I_{ράβδου}$$

7. Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για τρείς ακόμα διαφορετικές θέσεις της μάζας πάνω στη ράβδο.
8. Καταγράφουμε σε πίνακα τη ροπή αδράνειας της σημειακής μάζας συναρτήσει της απόστασής της από τον άξονα περιστροφής.

Πίνακας 4

Απόσταση (d±δd)	Ροπή Αδράνειας συστήματος μάζας-ραβδου (I±δI)	Ροπή Αδράνειας σημειακής μάζας (I±δI)

9. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το διάγραμμα $\log I_{μαζας} - \log d$. Σύμφωνα με τη σχέση (7) έχουμε ότι $\log I_{μαζας} = n \cdot \log d + \log k$
Επομένως η κλίση αυτού του διαγράμματος θα μας δόσει τη δύναμη *n*.
10. Να συγκρίνετε τη δύναμη *n*, με αυτή που θα περιμένατε θεωρητικά. Συμφωνούν στα όρια του πειραματικού σφάλματος;
11. Να συγκρίνετε τη διατομή $(\log k)$ με αυτή που θα περιμένατε θεωρητικά με βάση τη μάζα του σώματος.

Ερωτήσεις

1) Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει τη ροπή αδράνειας της ράβδου
2) Γιατί απορρίπτουμε τις πρώτες 10 μετρήσεις;
3) Για ποιό λόγο πρέπει να μεγενθύνουμε πολύ την απεικόνηση των κορυφών κατά τη μέτρηση των χρονικών στιγμών που αντιστοιχούν οι παλμοί;

Βιβλιογραφία

Serway R. A. & Jewett J.W., Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς, $8^{η}$ Εκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Instruction Manual and Experiment Guide for the PASCO scientific Model ME-8950A, COMPLETE ROTATIONAL SYSTEM, (PASCO 012-05293F 01/09)