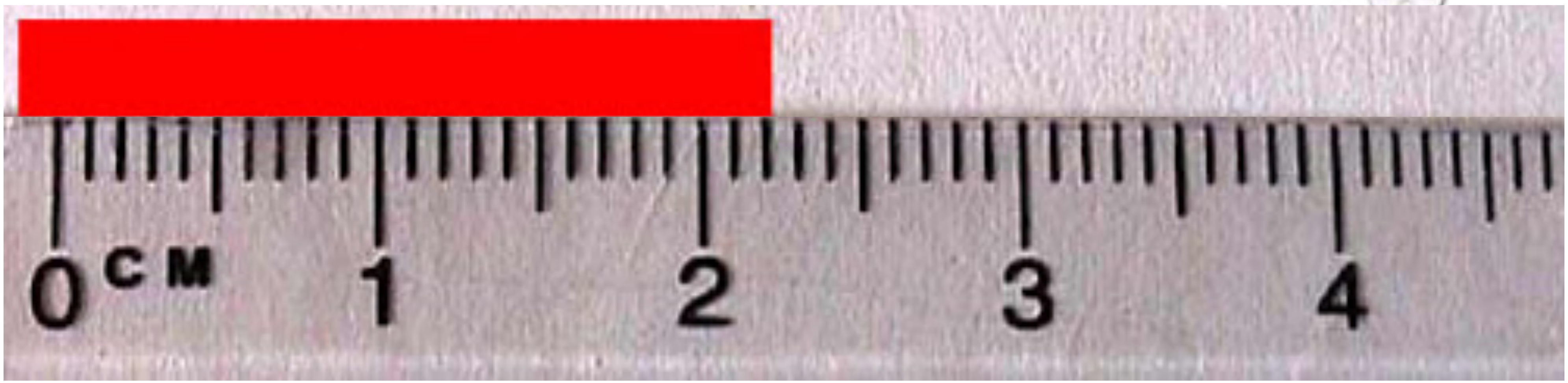
Σφάλματα μετρήσεων

<u>Καμία μέτρηση δεν είναι απόλυτα ακριβής</u>

Δύο είδη σφαλμάτων:

1. <u>Συστηματικά σφάλματα</u>
   Επηρεάζουν όλες τις μετρήσεις με τον ίδιο τρόπο
   π.χ. Χρήση οργάνου μέτρησης με λάθος βαθμονόμηση
   ή λάθος χρήση του οργάνου, επίδραση περιβαλοντικών παραγόντων κλπ.

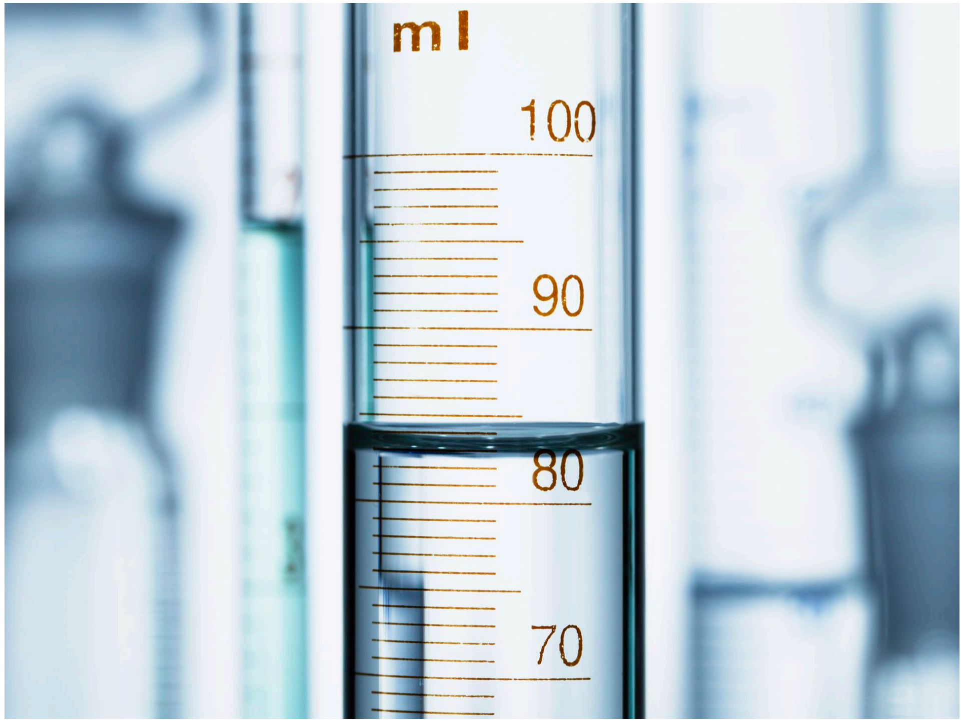
   Μπορουν να εκτιμηθούν και να αφαιρεθούν



Σφάλματα μετρήσεων

Καμία μέτρηση δεν είναι απόλυτα ακριβής

2. Τυχαία σφάλματα
   - Επηρεάζουν όλες τις μετρήσεις με τυχαίο τρόπο
   - Μπορούν να ελαχιστοποιηθούν αλλά όχι να απαλλειφθούν
   - Μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθός τους αλλά δεν μπορούν να αφαιρεθούν
   - Προέρχονται από τη διαδικασία μέτρησης.
   - Καταγράφονται ως $x \pm \delta x$



Εκτίμηση σφαλμάτων

<u>Βασικό θεώρημα:</u>
Μετρώντας την <u>**ίδια**</u> ποσότητα πολλές φορές μπορούμε να εκτιμήσουμε με καλύτερη ακρίβεια την πραγματική τιμή της ποσότητας και το σφάλμα της

Μέση Τιμή $$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Προσεγγίζει την πραγματική τιμή για N >>

Τυπική απόκλιση δείγματος $$\sigma_X = \left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right)^{1/2}$$

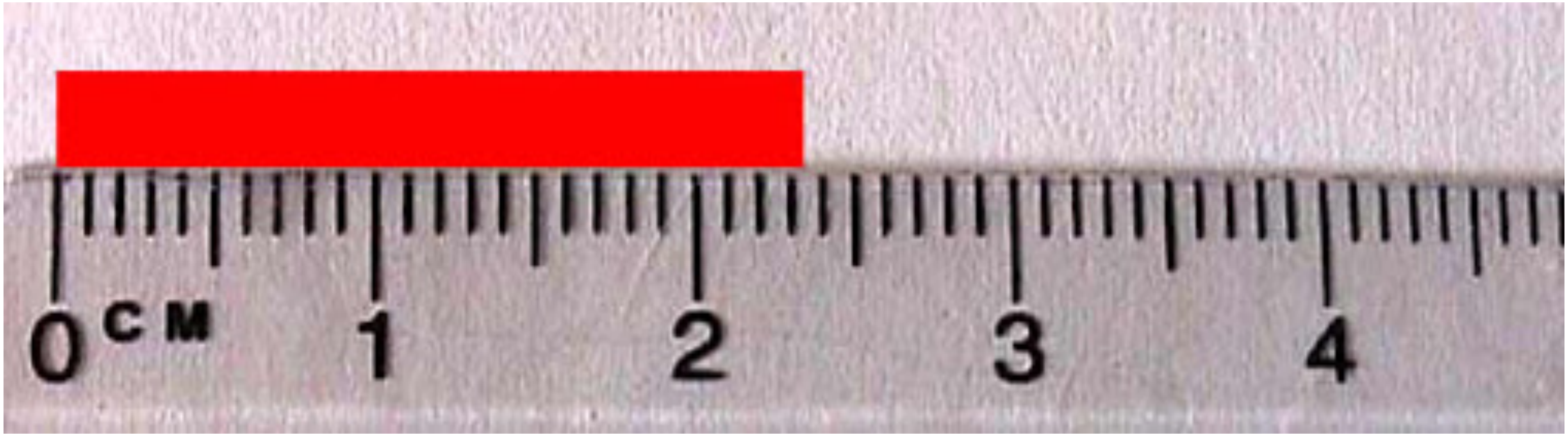
Δίνει μια ένδειξη πόσο «παίζουν» οι μετρήσεις

Για μία μέτρηση το σφάλμα δx είναι
το ½ της ελάχιστης υποδιαίρεσης του οργάνου εαν γίνεται εκτίμηση της τιμής της μέτρησης
η ελάχιστη υποδιαίρεση εαν δεν γίνεται εκτίμηση

Εκτίμηση σφαλμάτων

Για μία μέτρηση x το σφάλμα δx είναι:

το ½ της ελάχιστης υποδιαίρεσης του οργάνου εαν γίνεται εκτίμηση της τιμής της μέτρησης : (2.35 ± 0.05)cm



η ελάχιστη υποδιαίρεση εαν δεν γίνεται εκτίμηση : (2.3 ± 0.1)cm

Παραδείγματα Σφαλμάτων

Απόλυτο σφάλμα : x=(20.0 ± 0.1) cm

Σχετικό σφάλμα : $\frac{\delta x}{x} = 0.005$ (ή ακρίβεια μέτρησης 0.5%)

Το σφάλμα και η μέτρηση θα πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων

Τα δεκαδικά ψηφία υποδηλώνουν την ακρίβεια.

Συχνά λάθη

x=(20.0 ± 0.01) cm : Το σφάλμα έχει μεγαλύτερη ακρίβεια από τη μέτρηση

x=(20.00 ± 0.1) cm : Το σφάλμα έχει μικρότερη ακρίβεια από τη μέτρηση

Σημαντικά ψηφία

Ο αριθμός των ψηφίων μιας μέτρησης υποδηλώνει την ακρίβειά της:

$x=20.0$ cm διαφορετικό από $x=20.00$ cm

Η πρώτη μέτρηση έχει 3 σημαντικά ψηφία, η δεύτερη έχει 4.

Ομως:

0.25 cm είναι το ίδιο με 2.5mm

Και οι δυο μετρήσεις έχουν 2 σημαντικά ψηφία

Το σφάλμα εχει πάντα 1 σημαντικό ψηφίο

$\delta T = 0.2$sec αντί για $\delta T = 0.25$sec ή $\delta T = 2.5$sec

Σημαντικά ψηφία

Σημαντικά ψηφία μετά από πράξεις:

Στην πρόσθεση κρατάμε όσα δεκαδικά ψηφία έχει η λιγότερο ακριβής μέτρηση

$$4.37 + 3.2 = 7.6$$

Στις άλλες πράξεις εφαρμόζουμε την ακόλουθη μέθοδο:
αλλάζουμε το τελευταίο ψηφίο των τιμών που εμπλέκονται στην πράξη και βλέπουμε σε ποιό δεκαδικό ψηφίο μεταβάλλεται το αποτέλεσμα

$x = 25.678 \quad \log(x) = 1.40956$

$x' = 25.679 \quad \log(x') = 1.4078$

Αρα $\log(x) = 1.40956 \sim 1.41$

Κανόνες στρογγυλοποίησης

Εαν το ψηφίο που ακολουθεί το ψηφίο που επιθυμούμε να στρογγυλοποιήσουμε είναι:

- >5 στογγυλοποιείται προς τα πάνω : 0.647 → 0.65
- <5 στογγυλοποιείται προς τα κάτω : 0.644 → 0.64

- =5 και έπονται άλλα ψηφια στρογγυλοποιείται προς τα πάνω : 0.6454 → 0.65

- =5 και δεν έπονται άλλα ψηφια στρογγυλοποιείται στον κοντινοτερο άρτιο αριθμό

  0.645 → 0.64

  0.635 → 0.64

  4.35 + 3.2 = 7.55 → 7.6

Για ποσότητες που προέρχονται από μετάδοση σφάλματος

στογγυλοποιούμε το σφάλμα στο 1 σημαντικό ψηφιο

π.χ. δx = 0.02578 V → δx = 0.03 V

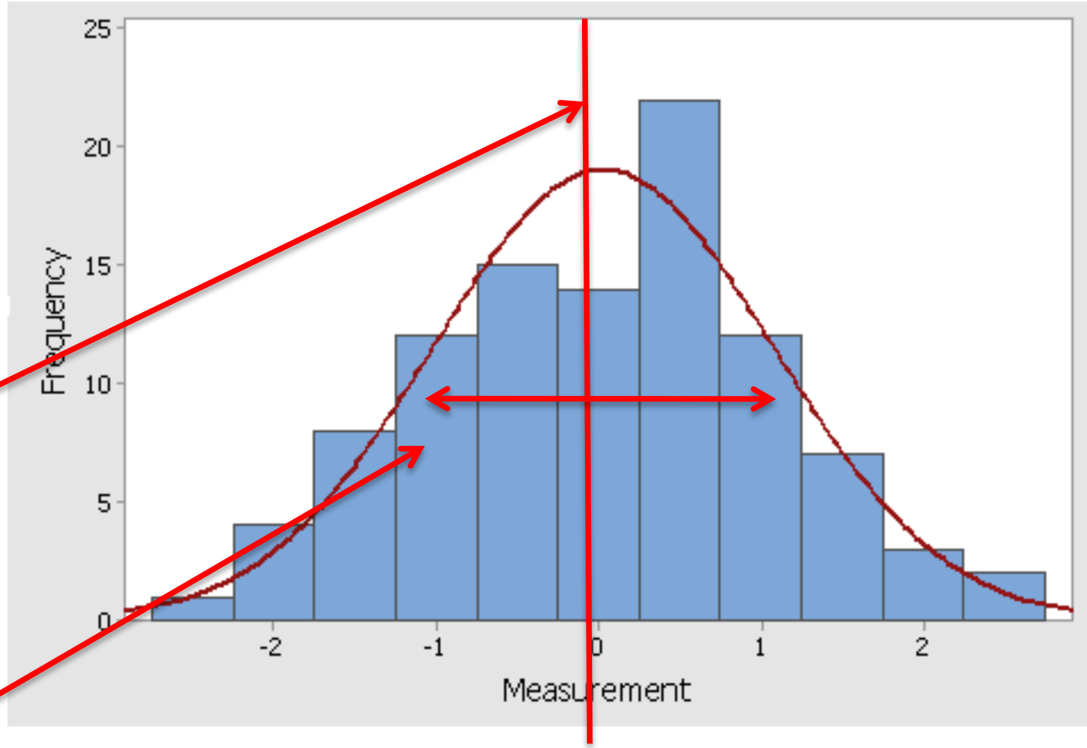
στη συνέχεια στρογγυλοποιούμε την τιμή της ποσότητας στο ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων

π.χ. x = 4.5672 V → (4.57 ± 0.03) V

Κανονική κατανομή

Εαν τα σφάλματα είναι τυχαία τότε η κατανομή των μετρήσεων ακολουθεί την κανονική κατανομή (κατανομή Gauss)

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$



μ: Μέση Τιμή $= \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

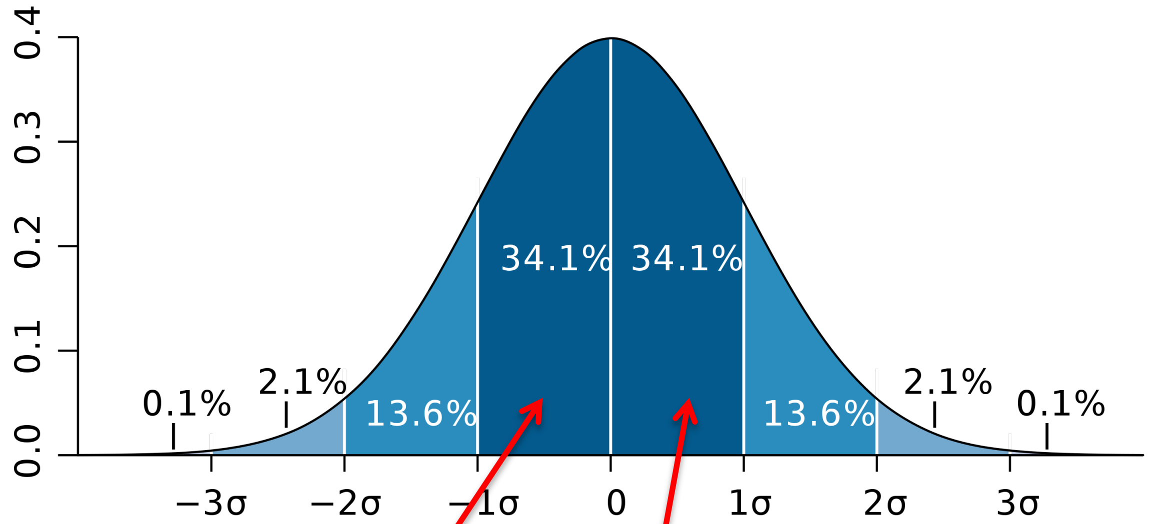
σ : Τυπική Απόκλιση = $\sigma_X = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \overline{x} \right)^2 \right)^{1/2}$

Κανονική κατανομή

Εαν τα σφάλματα είναι τυχαία τότε η κατανομή των μετρήσεων ακολουθεί την κανονική κατανομή (κατανομή Gauss)

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$P\left(\left|x-\mu\right| < \sigma\right) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu-\sigma} P(x)dx$$



Με βάση τις μετρήσεις μιας φυσικής ποσότητας γνωρίζουμε την πλήρη κατανομή πιθανότητας των τιμών αυτής της ποσότητας

7	P(x-μ<σ)	P(|x-μ >σ)	P(|x-μ|>σ)
1σ	34.1	34.1	68.2
2σ	47.5	47.5	95.4
3σ	49.8	49.8	99.7
5σ	49.99	49.99	99.999

Μετάδοση Σφάλματος

Εστω οτι μετράμε τη διάμετρο ενός κυλίνδρου $\alpha = (27.62 \pm 0.01)$ mm

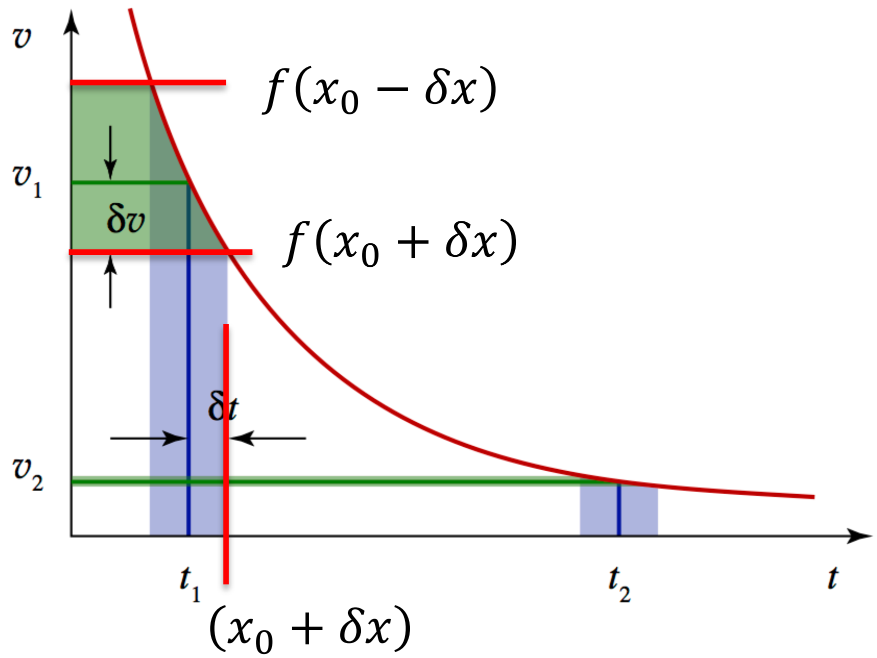
Ποιό είναι το σφάλμα στην περιμετρό του $\Pi = \pi\alpha$;

Μετάδοση Σφάλματος

Το σφάλμα μιας παράγωγου ποσότητας f που προέρχεται από μια ποσότητα x±δx μέσω της σχέσης f(x)

Η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του f θα είναι

$$f_{max} = f(x_0 + \delta x)$$
$$f_{min} = f(x_0 - \delta x)$$



και το σφάλμα θα είναι

$$\delta f = f_{max} - f_0 = f(x_0 + \delta x) - f(x_0)$$

ή

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x} \cong$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x} \equiv \frac{df}{dx}$$

Αρα: $\delta f = \left|\frac{df}{dx}\right| \delta x$ Πιθανό σφάλμα

Μετάδοση Σφάλματος

Εστω οτι μετράμε τη διάμετρο ενός κυλίνδρου α = (27.62 ± 0.01) mm

Ποιό είναι το σφάλμα στην περιμετρό του Π = πα ;

Το σφάλμα μιας παράγωγου ποσότητας f που προέρχεται από μια

ποσότητα x±δx είναι $$\delta f = \frac{df}{dx}\delta x$$

Αρα το σφάλμα της περιμέτρου είναι $$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{d\alpha}\delta\alpha = \pi\delta\alpha$$

ή Π = 86.7544 mm και δΠ = 0.031 mm

Επομένως Π = (86.75 ± 0.03) mm

Μετάδοση Σφάλματος

Στην περίπτωση περισσότερων μεταβλητών $f(x_1, x_2, ... x_n)$

Η προηγούμενη σχέση γενικεύεται ως

$$\left(\delta f\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2\right)^2 + \mathrm{L} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n\right)^2$$

Αρα το σφάλμα του όγκου στο παράδειγμα του κυλίνδρου
εάν μετράμε τη διάμετρό του α θα είναι $a \pm \delta a$ και το ύψος του $\mathrm{h} \pm \delta h$

$$\delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 = \left(\pi \frac{a}{2} h \delta \alpha\right)^2 + \left(\pi \frac{a^2}{4} \delta h\right)^2$$

Μετάδοση Σφάλματος

Μερικές παρατηρήσεις:

1. Μπορούμε πάντοτε να εκφράσουμε το πιθανό σφάλμα συναρτήσει του σχετικού σφάλματος των μετρούμενων ποσοτήτων

Για παράδειγμα για τον όγκο του κυλίνδρου έχουμε

$$\left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2$$

Το σχετικό σφάλμα πάντα αυξάνεται, ποτέ δεν πρόκειται να ελαττωθεί

Μετάδοση Σφάλματος

Μερικές παρατηρήσεις:

2. Το σφάλμα πρέπει να έχει τις ίδιες μονάδες με την ποσότητα στην οποια αναφέρεται

Πάντοτε ελέγχουμε τις μονάδες
Πολύ καλός τρόπος για τον έλεγχο των πράξεων

Μετάδοση Σφάλματος

Μερικές παρατηρήσεις:

3. Οταν κάνουμε πράξεις για τη μετάδοση σφάλματος οι σταθερές πρέπει να έχουν περισσότερα σημαντικά ψηφια από την ακριβέστερη μέτρηση

Στο παράδειγμα του κυλίνδρου
εάν μετράμε τη διάμετρό του $a = 2.005 \pm 0.002\mathrm{cm}$ και
το ύψος του $\mathrm{h} = 0.03 \pm 0.01\mathrm{cm}$

Η σταθερά π=3.14159 θα πρέπει να έχει τουλάχιστον 4 σημ. ψηφία

Μετάδοση Σφάλματος

Μερικές παρατηρήσεις:

4. Όταν ολοκληρωθούν οι υπολογισμοί στρογγυλοποιούμε το σφάλμα στο ένα σημαντικό ψηφίο και την ποσότητα στον ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων που έχει το σφάλμα

Στο παράδειγμα του κυλίνδρου
εάν μετράμε τη διάμετρό του $a = 2.005 \pm 0.002\mathrm{cm}$ και
το ύψος του $\mathrm{h} = 3.03 \pm 0.01\mathrm{cm}$

$V = 9.566\ \mathrm{cm}^3$
$\delta V = 0.0368 \cong 0.04\ \mathrm{cm}^3$

Αρα $V = 9.57 \pm 0.04\ \mathrm{cm}^3$

Μετάδοση Σφάλματος

Μερικές παρατηρήσεις:

5. Η μετάδοση σφάλματος ΔΕΝ εφαρμόζεται όταν υπολογίζουμε τη μέση τιμή

Το σφάλμα της μέσης τιμής πολλών μετρήσεων της **ίδιας ποσότητας** δίνεται από την τυπική απόκλιση