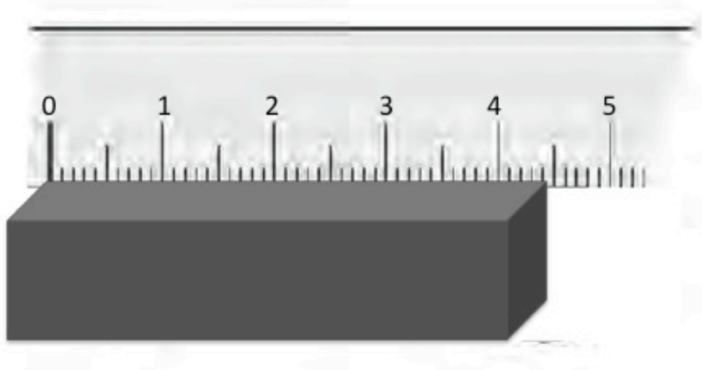
Α. 1. Μετρήσεις και Σφάλματα

Κάθε πειραματική μέτρηση μίας φυσικής ποσότητας υπόκειται σε πειραματικά σφάλματα. Με τον όρο αυτό δεν εννοούμε λάθη τα οποία γίνονται κατά την εκτέλεση του πειράματος ή τη λήψη των μετρήσεων, τα οποία προφανώς θα πρέπει να αποφεύγονται. Αντίθετα, με τον όρο «πειραματικό σφάλμα» αναφερόμαστε στους παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν τις μετρήσεις μας, και οι οποίοι δεν μπορούν να εξαλειφθούν, καθώς και στην αβεβαιότητα που υπαρχει για την τιμή της κάθε μέτρησης. Η αβεβαιότητα αυτή μπορεί να οφείλεται είτε στον τρόπο που γίνεται η μέτρηση, είτε στη ακρίβεια των οργάνων μέτρησης. Γενικότερα υπάρχουν δύο κατηγορίες σφαλμάτων: τα συστηματικά σφάλματα, και τα τυχαία ή στατιστικά σφάλματα.

Συστηματικά σφάλματα, είναι τα σφάλματα τα οποία επηρεάζουν συστηματικά και με τον ίδιο τρόπο όλες τις μετρήσεις. Τέτοια είναι τα σφάλματα που οφείλονται στη λάθος βαθμονόμηση της συσκευής μέτρησης ή σε περιβαλλοντικούς παράγοντες. Για παράδειγμα η χρήση ενός θερμομέτρου του οποίου η κλίμακα βαθμονόμησης έχει μετατοπιστεί, θα έχει ως αποτέλεσμα το μηδέν της κλίμακας να μην αντιστοιχεί σε 0^o C, και επομένως όλες οι μετρήσεις θα είναι μετατοπισμένες από την πραγματική θερμοκρασία κατά αυτή τη διαφορά. Αντίστοιχα εάν χρησιμοποιήσουμε για τη μέτρηση ενός μήκους ένα μεταλλικό χάρακα που έχει βαθμονομηθεί σε θερμοκρασία πολύ διαφορετική από αυτή που εκτελείται το πείραμα, τότε λόγω συστολής ή διαστολής η κλίμακα του χάρακα θα έχει αλλάξει και το μήκος που μετράμε δεν θα αντιστοιχεί στο πραγματικό μήκος, με αποτέλεσμα να παίρνουμε συστηματικά διαφορετικές μετρήσεις. Τα συστηματικά σφάλματα τις περισσότερες φορές μπορούν να αναγνωρισθούν και να διορθωθούν κατά την ανάλυση των μετρήσεων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του θερμομέτρου, μετρώντας τη θερμοκρασία πάγου που λιώνει, ή απεσταγμένου νερού που βράζει, για τα οποία γνωρίζουμε την πραγματική τους θερμοκρασία, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις αποκλίσεις της κλίμακας και να τις προσθέσουμε αλγεβρικά σε όλες τις μετρήσεις.

Τα **Τυχαία σφάλματα,** σε αντίθεση, επηρεάζουν όλες τις μετρήσεις αλλά με **τυχαίο τρόπο** και επομένως δεν μπορούν να αφαιρεθούν κατά την επεξεργασία τους. Τα τυχαία σφάλματα οφείλονται σε ατέλειες της πειραματικής διάταξης και την πεπερασμένη ακρίβεια των οργάνων μέτρησης σε συνδυασμό με την επίδραση των αισθήσεων μας. Επιπλέον, τυχαίες και μη ελεγχόμενες μεταβολές των περιβαλλοντικών συνθηκών μπορεί να επηρεάσουν τις μετρήσεις μας κατά μη επαναλήψιμο τρόπο. Οι παραπάνω παράγοντες θα έχουν ως αποτέλεσμα να παίρνουμε διαφορετικές τιμές από πολλαπλές μετρήσεις του ίδιου μεγέθους. Επειδή ακριβώς οι μετρήσεις διαφέρουν κατά έναν μεταβαλλόμενο, μη προβλέψιμο παράγοντα δεν είναι δυνατόν να διορθωθούν για την επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων (σε αντίθεση με τα συστηματικά σφάλματα, η επίδραση των οποίων είναι η ίδια και επομένως διορθώσιμη).

Για παράδειγμα εάν μετράμε το μήκος ενός αντικειμένου με ένα χάρακα, η τιμή της μέτρησης θα εξαρτάται από την ακριβή θέση που θα τοποθετήσουμε το χάρακα, την εκτίμηση που θα κάνουμε για την ακριβή ένδειξη στο σημείο που βρίσκεται η ακμή του αντικειμένου (Σχήμα 1), τη γωνία παρατήρησης, κ.λ.π. Το αποτέλεσμα της επίδρασης των παραπάνω παραγόντων θα είναι οι μετρήσεις να διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα μικρό τυχαίο ποσό.



Σχήμα 1. Παράδειγμα μέτρησης του μήκους μιας ράβδου. Το πραγματικό μήκος της ράβδου είναι μεταξύ 4.4 και 4.5. Η ακρίβεια με την οποία μπορεί να γίνει η μέτρηση εξαρτάται από την ακρίβεια βαθμονόμησης του χάρακα.

Η επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων. Εαν όμως μετράμε **το ίδιο μέγεθος** πολλές φορές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις διαφοροποιήσεις των μετρήσεων ώστε να εκτιμήσουμε την πραγματική τιμή του μεγέθους και το αντίστοιχο σφάλμα των μετρήσεών μας. Αυτό ακριβώς είναι το αντικείμενο της Θεωρίας Ανάλυσης Μετρήσεων.

Εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε n μετρήσεις της ίδιας ποσότητας τότε η μέση τιμή των μετρήσεων προσεγγίζει την πραγματική τιμή του μεγέθους. **Η μέση τιμή ορίζεται ώς**

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad (1)$$

όπου x_i είναι οι επιμέρους μετρήσεις και $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή τους.
Η μέση τιμή $\bar{x}$ τείνει στην πραγματική τιμή όταν το $n \to \infty$.

Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερο αριθμό μετρήσεων έχουμε τόσο καλύτερα προσεγγίζουμε την πραγματική τιμή του μεγέθους που θέλουμε να μετρήσουμε. Συνήθως 10 μετρήσεις είναι αρκετές για να έχουμε μια αρκετά καλή προσέγγιση της πραγματικής τιμής του μεγέθους.

Η **διασπορά** των μετρήσεων γύρω από τη μέση τιμή τους, θα μας δώσει μια εκτίμηση των τυχαίων σφαλμάτων, αφού απουσία σφαλμάτων όλες οι μετρήσεις θα ήταν ταυτόσημες. Η διασπορά των μετρήσεων μπορεί να εκτιμηθεί από την **τυπική απόκλιση του δείγματος που ορίζεται ως:**

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}} \qquad (2)$$

όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των μετρήσεων. Η παραπάνω σχέση ισχύει όταν n≥5.
Και πάλι η τυπική απόκλιση του δείγματος προσεγγίζει την πραγματική τιμή του σφάλματος όταν το $n \to \infty$.

Οταν έχουμε μια μέτρηση α και το σφάλμα της δα γράφουμε (α±δα), το οποίο μας λέει ότι η μετρούμενη ποσότητα μπορεί να πάρει, κατά κύριο λόγο, τιμές στο διάστημα [α-δα, α+δα]. Οι μονάδες μέτρησης της ποσότητας παρατίθενται μετά την παρένθεση, για παράδειγμα γράφουμε (15.30±0.05) cm.

Ακρίβεια μετρήσεων: Απόλυτο και Σχετικό Σφάλμα

Όπως είδαμε κάθε μέτρηση εμπεριέχει και κάποιο σφάλμα. Επομένως ο τρόπος με τον οποίο θα παρουσιάζουμε τις μετρήσεις μας θα πρέπει να περιλαμβάνει την ακρίβεια της κάθε μέτρησης. Για παράδειγμα εάν μετρήσουμε ένα μήκος 15.5cm με σφάλμα 0.5cm, τότε γράφουμε (15.5 ±0.5) cm. Δηλαδή η πραγματική τιμή του μήκους κυμαίνεται κυρίως μεταξύ 15.0 και 16.0 cm.

Εάν κάνουμε την παραπάνω μέτρηση με ένα όργανο μεγαλύτερης ακρίβειας τότε θα βρούμε 15.62 cm με σφάλμα 0.05cm, ή (15.62±0.05) cm. Δηλαδή τώρα γνωρίζουμε ότι η πραγματική τιμή είναι πιο κοντά στο 15.6 cm, και μάλιστα βρίσκεται μεταξύ του 15.57 cm και 15.67 cm.

Τα τυχαία σφάλματα 0.5 cm και 0.05 cm λέγονται **απόλυτα σφάλματα**.

- **Στην περίπτωση μετρήσεων με αναλογικά όργανα το απόλυτο σφάλμα της κάθε μέτρησης ισούται με το μισό της ελάχιστης υποδιαίρεσης του οργάνου**, καθώς μέσα σε αυτά τα όρια βρίσκεται η καλύτερη *εκτίμηση* που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της μέτρησης.
- **Στην περίπτωση μετρήσεων με ψηφιακά όργανα το απόλυτο σφάλμα του οργάνου μας δίνεται από τον κατασκευαστή.**
- **Το σφάλμα των οργάνων είναι το ελάχιστο σφάλμα** που μπορεί να έχει μια μέτρηση. Παράγοντες όπως η γωνία παρατήρησης της κλίμακας του οργάνου, ο χρόνος αντίδρασης, τυχαίοι περιβαλλοντικοί παράγοντες, συνεισφέρουν επιπλέον στα πειραματικά σφάλματα. **Μια εκτίμηση του συνολικού σφάλματος στην περίπτωση επαναλαμβανόμενων μετρήσεων του μεγέθους μας δίνεται από την τυπική απόκλιση του δείγματος η οποία υπολογίζεται με τη σχέση (2).** Με βάση τα παραπάνω η τυπική απόκλιση του δείγματος θα πρέπει να είναι ίση ή μεγαλύτερη από το σφάλμα του οργάνου, αφού ακόμα και εάν αποκλείσουμε όλες τις άλλες πηγές σφάλματος, η ακρίβεια των μετρήσεων θα καθορίζεται κατ' ελάχιστο από την ακρίβεια του οργάνου μέτρησης.

Από την παραπάνω συγκριση είναι προφανές ότι η μέτρηση (15.62±0.05) cm είναι **πιό ακριβής** από τη μέτρηση (15.5 ±0.5) cm, αφού έχει μικρότερο σφάλμα. Ισχύει όμως το ίδιο εάν συγκρίνουμε δύο υποθετικές μετρήσεις (1587.5 ±0.5) cm και (15.25 ±0.05) cm; Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να λάβουμε υπ'οψιν μας το γεγονός ότι ένα σφάλμα της τάξεως του 0.5 cm έχει πολύ μικρότερη σημασία σε μία μέτρηση με μεγάλη αριθμητική τιμή όπως 1587.5cm απ' ότι μια μέτρηση με σφάλμα 0.05 cm που αναφέρεται σε μία κατά πολύ μικρότερη αριθμητική τιμή. Επομένως ένας πιό ποσοτικός τρόπος για να εκτιμήσουμε την ακρίβεια μιας μέτρησης είναι να δούμε το **σχετικό σφάλμα** που ορίζεται ως

$$\boxed{\textbf{Σχετικό σφάλμα}: \ (\delta x / x)}$$

Το οποίο μπορεί να εκφραστεί και ως ποσοστιαίο σφάλμα .

όπου δx είναι το σφάλμα και x η τιμή της μέτρησης.

Προφανώς **όσο μικρότερο είναι το σχετικό σφάλμα τόσο ακριβέστερη είναι η μέτρησή μας.**

Το απόλυτο σφάλμα έχει μονάδες ίδιες με τη μετρούμενη ποσότητα, ενώ το σχετικό σφάλμα είναι καθαρός αριθμός.

Σημαντικά Ψηφία

Από το παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε ότι ο αριθμός των ψηφίων της τιμής μιας μέτρησης μας δίνει μία εικόνα της ακρίβειάς της. Ετσι λέμε ότι η μέτρηση 1587.5 cm έχει 5 **σημαντικά ψηφία** ενώ η μέτρηση 15.5 cm έχει μόνο τρία σημαντικά ψηφία. Ιδιαίτερη σημασία έχουν τα μηδενικά ψηφία στο τέλος μιας τιμής: η τιμή 15.00 cm υποδηλώνει ότι η μέτρηση αυτή έχει ακρίβεια ~0.01 cm, ενώ η τιμή 15 cm υποδηλώνει ότι έχει ακρίβεια ενός cm. Επομένως **τα μηδενικά ψηφία στο τέλος μίας τιμής *δεν στρογγυλοποιούνται ή παραλλείπονται* καθώς υποδηλώνουν την ακρίβειά της.**

Εάν θέλουμε να εκφράσουμε τη μέτρηση 15 cm σε χιλιοστά θα ήταν λάθος να γράψουμε 150 mm, αφού αυτό υποδηλώνει ότι η μέτρηση έχει τρία σημαντικά ψηφία (ή αλλοιώς ακρίβεια 1 mm), αντί για 2 σημαντικά ψηφία (και ακρίβεια 1 cm) που είχε η αρχική μέτρηση. Ο ορθός τρόπος για να γίνουν μετρατροπές μονάδων είναι να γραφούν υπό μορφή δύναμης: στην προκειμένη περίπτωση 15×10 mm. Με αυτό τον τρόπο κρατάμε τον ίδιο αριθμό σημαντικών ψηφίων και υποδηλώνουμε ότι η ακρίβεια της μέτρησης είναι της τάξεως των 10 mm (ή 1 cm).

Αντίθετα τα μηδενικά ψηφία στην αρχή μιας τιμής δεν είναι σημαντικά ψηφία. Η παραπάνω μέτρηση μπορεί να γραφεί ως 0.15 m, η οποία έχει 2 σημαντικά ψηφία και υποδηλώνει ακρίβεια 1 cm. Το ίδιο ισχύει και εάν τη γράψουμε ως 0.00015 km. Η τιμή αυτή έχει 2 σημαντικά ψηφία, και ακρίβεια 0.00001 km, δηλαδή 1 cm. Για λόγους οικονομίας όμως προτιμούμε να γράφουμε και αυτές τις μετρήσεις υπό τη μορφή δύναμης: 15×10^{-5} km.

Έχει ιδαίτερη σημασία τα σημαντικά ψηφία μιας μέτρησης να συμφωνούν με το σφάλμα της. Εάν γράψουμε (15.622 ± 0.05) cm, τότε με βάση την τιμή της μέτρησης δηλώνουμε ότι η ακρίβειά της είναι της τάξεως 0.001 cm, ενώ με βάση το σφάλμα της έχουμε ότι η ακρίβεια της είναι κατα πολύ μικρότερη. **Επομένως η παραπάνω γραφή είναι λάθος**. Ο σωστός τρόπος για να γραφεί αυτή η τιμή είναι (15.62 ± 0.05) cm, όπου τόσο η τιμή της μέτρησης όσο και το σφάλμα της δηλώνουν ότι έχει ακρίβεια ~0.01 cm.

Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων θα πρέπει να διατηρείται και όταν γίνονται αριθμητικές πράξεις. Ο γενικός κανόνας είναι ότι **ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων του αποτελέσματος καθορίζεται από την τιμή με τη μικρότερη ακρίβεια**. Ειδικότερα στην περίπτωση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης το αποτέλεσμα θα έχει τόσα **δεκαδικά ψηφία όσα και ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία.** Επομένως η πράξη 2.15 + 0.1 θα μας δώσει 2.2 και όχι 2.25. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού εάν προσθέσουμε μια τιμή με μεγάλη ακρίβεια σε μια μικρότερη τιμή η οποία έχει πολύ μεγαλύτερη αβεβαιότητα, η ακρίβεια του αποτελέσματος θα εξαρτηθεί από τη λιγότερο ακριβή τιμή.

Σημαντικά ψηφία σφαλμάτων

Το σφάλμα μιας τιμής έχει ένα σημαντικό ψηφίο. Επομένως εάν υπολογίσουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση μιας σειράς μετρήσεων, στρογγυλοποιούμε την τυπική απόκλιση στο ένα σημαντικό ψηφίο, και στη συνέχεια στρογγυλοποιούμε τη μέση τιμή στον αντίστοιχο αριθμό δεκαδικών ψηφίων. Δηλαδή η τιμή 15.367 ± 0.023 θα γραφεί ως 15.37 ± 0.02.

Τα μη σημαντικά ψηφία στρογγυλοποιούνται με βάση τους εξής κανόνες:

- Εάν το τελευταίο ψηφίο είναι μικρότερο του 5 τότε παραλείπεται (στρογγυλοποίηση προς τα κάτω).
- Εάν το τελευταίο ψηφίο είναι μεγαλύτερο του 5 τότε ο προηγούμενος αριθμός αυξάνεται κατά 1 (στρογγυλοποίηση προς τα πάνω)
- Το 5 στρογγυλοποιείται προς τον κοντινότερο άρτιο αριθμό (με αυτό τον τρόπο ελαχιστοποιούμε τις αποκλίσεις λόγω προηγούμενης στρογγυλοποίησης).

Η ίδια μέθοδος για τον προσδιορισμό των σημαντικών ψηφίων σε αποτελέσματα πράξεων ακολουθείται σε οποιαδήποτε άλλη πράξη. Εάν έχουμε αμφιβολία σχετικά με τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων του αποτελέσματος μιας πράξης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δυο μεθόδους για να τον εκτιμήσουμε:

α) Η μέθοδος με το ερωτηματικό

Συμπληρώνουμε τις τιμές με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία με ερωτηματικά, και αντίστοιχα θέτουμε ερωτηματικά στα ψηφία του αποτελέσματος που προκύπτουν από αυτά τα ψηφία:

$$\begin{array}{r} 4.405 \\ 14.82; \\ +\ \ 2.3;\, ; \\ \hline 21.5;\, ; \end{array}$$

Επομένως το αποτέλεσμα της παραπάνω πράξης έχει ένα δεκαδικό ψηφίο (όσα και ο αριθμός 2.3), και 3 σημαντικά ψηφία.

Η ίδια μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και στις άλλες αριθμητικές πράξεις.

Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε ότι το αποτέλεσμα δεν έχει ποτέ περισσότερα σημαντικά ψηφία από το λιγότερο ακριβή αριθμό (εξαίρεση σε αυτό τον κανόνα αποτελούν οι πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης όπου το αποτέλεσμα δεν έχει περισσότερα *δεκαδικά* ψηφία από τη λιγότερο ακριβή μέτρηση).

β) Η μέθοδος με το αβέβαιο ψηφίο.

Σε αυτή την περίπτωση κάνουμε την πράξη με όλα τα διαθέσιμα δεκαδικά ψηφία. Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την πράξη αλλάζοντας όμως κατά 1 ή 2 την τιμή του τελευταίου ψηφίου στη μέτρηση με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία. Από το αρχικό αποτέλεσμα απορρίπτουμε όσα ψηφία βρίσκονται μετά από το ψηφίο που μεταβλήθηκε.

Επομένως στο πρώτο παράδειγμα που είδαμε, χωρίς να λάβουμε υπ'οψιν μας τα σημαντικά ψηφία το άθροισμα θα είναι:

$$(4.405 + 14.82 + 2.3) = 21.525.$$

Εάν αλλάξουμε το 2.3 σε 2.4 έχουμε:

$$(4.405 + 14.82 + 2.4) = 21.625$$

Επομένως θα πρέπει να κρατήσουμε από το αρχικό αποτέλεσμα μέχρι και το πρώτο δεκαδικό ψηφίο, δηλαδή το αποτέλεσμα θα είναι 21.5.

Αυτή η μέθοδος είναι ιδαίτερα χρήσιμη όταν κανουμε πιο πολύπλοκες πράξεις, π.χ. ύψωση σε δύναμη, υπολογισμό λογαρίθμων κ.λ.π.

Στην περίπτωση πράξεων με σταθερές, η σταθερά πρέπει να έχει περισσότερα σημαντικά ψηφία από την ακριβέστερη τιμή ώστε να μην περιορίζει την ακρίβεια του αποτελέσματος. Για παράδειγμα εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την περίμετρο ενός δακτυλίου με ακτίνα 2.205cm τότε η τιμή του π που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι π=3.141592, και η περίμετρος θα είναι $2 \times 2.205 \times 3.1415 = 13.854$ cm.

Στατιστική ερμηνεία των σφαλμάτων και σύγκριση μετρήσεων.

Εάν πάρουμε μια σειρά μετρήσεων του **ίδιου αμετάβλητου μεγέθους** (π.χ. τη θερμοκρασία νερού που βράζει, τις διαστάσεις ενός αντικειμένου κ.λ.π.) και κάνουμε το ιστόγραμμα των τιμών τους θα δούμε ότι ακολουθούν την **Κανονική κατανομή** ή κατανομή Gauss. Οσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των μετρήσεων τόσο καλύτερα θα προσομοιάζει το ιστόγραμμα την Κανονική κατανομή. Αυτό είναι αποτέλεσμα της τυχαίας φύσης των στατιστικών σφαλμάτων.

Η Κανονική κατανομή δίνεται από τη σχέση

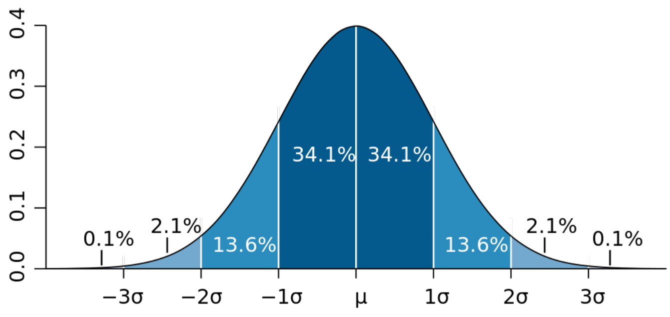
$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right)} \qquad \textbf{(3)}$$

όπου $G(x)$ είναι πυκνότητα πιθανότητας, μ είναι η μέση τιμή της κατανομής, και σ η τυπική της απόκλιση. Η μέση τιμή καθορίζει τη θέση του κέντρου της κατανομής, ενώ η τυπική απόκλιση καθορίζει το εύρος της (Σχήμα 2). Οπως για κάθε κατανομή πιθανότητας ισχύει ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx = 1$, και ο παράγοντας κανονικοποίησης $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ προκύπτει από αυτή ακριβώς την απαίτηση.

Η πιθανότητα να πάρουμε μια τιμή που θα είναι στο εύρος $[x, x+dx]$ είναι $dP_x = G(x)dx$. Επομένως η πιθανότητα να πάρουμε μια τιμή μεταξύ –σ και +σ είναι $\int_{-\sigma}^{+\sigma} G(x)dx = 0.682$ ή 68.2%. Λόγω συμμετρίας η πιθανότητα να πάρουμε μία τιμή στη περιοχή [-σ, μ] ή στην περιοχή [μ,+σ] είναι 34.1%. Στον ακόλουθο Πίνακα και Σχήμα δίνονται οι πιθανότητες να πάρουμε τιμές σε περιοχές της κανονικής κατανομής με διαφορετικό εύρος . Οι πιθανότητες αυτές είναι ανεξάρτητες της μέσης τιμής της κατανομής.

Πίνακας 1

Εύρος	**Πιθανότητα**
[-σ,σ]	68%
[-2σ, 2σ]	95.5%
[-3σ,3σ]	99.7%
[-5σ,5σ]	99.9999%



Σχήμα 2. Διάγραμμα της Κανονικής κατανομής όπου φαίνεται η πιθανότητα να πάρουμε μια τιμή περιοχές διαφορετικού εύρους.

Αποδεικνύεται[1] ότι στο όριο που έχουμε αρκετές μετρήσεις (10 ή παραπάνω) η μέση τιμή της Κανονικής κατανομής ισούται με τη μέση τιμή των μετρήσεων ενώ η τυπική απόκλιση της Κανονικής κατανομής ισούται με την τυπική απόκλιση του δείγματος σ_x που υπολογίζεται όπως είδαμε μέσω της σχέσης

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}$$

Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο μας επιτρέπει από τις ίδιες τις μετρήσεις να έχουμε μια πλήρη εικόνα της στατιστικής κατανομής τους.

Επιπλέον μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τις μετρήσεις μας με άλλες μετρήσεις ή με τιμές που προβλέπονται από κάποια θεωρία. Για παράδειγμα εάν μετρήσουμε το σημείο ζέσεως του νερού στους (100.5±0.1)°C και θέλουμε να συγκρίνουμε κατά πόσο αυτή η τιμή συμφωνεί με την αναμενόμενη τιμή των 100.0°C σε πίεση 1atm αρκεί να δούμε πόσες τυπικές αποκλίσεις απέχουν οι δύο τιμές. Βρίσκουμε ότι

$$\delta\Theta = (100.5 - 100.0)\ ^\circ\mathrm{C} = 0.5^\circ\mathrm{C}.$$

δηλαδή οι δύο τιμές απέχουν 0.5°C. Δεδομένου όμως ότι το σφάλμα είναι σ_Θ=0.1°C, η απόκλιση αυτή μεταφράζεται σε 5 τυπικές αποκλίσεις, ή 5σ. Δηλαδή όπως λέμε η αναμενόμενη τιμή βρίσκεται πολύ μακρυά από τη μέση τιμή των μετρήσεων, στην «ουρά» της κατανομής των τελευταίων.

Με βάση τον πίνακα 1 έχουμε ότι η πιθανότητα να πάρουμε μια τιμή στο εύρος [-5σ,5σ] είναι 99.9999%. Επομένως η πιθανότητα να πάρουμε μια μέτρηση που θα απέχει 5σ ή περισσότερο από τη μέση τιμή των μετρήσεών μας είναι 0.0001%. Η με άλλα λόγια θα χρειαζόταν να πάρουμε ένα εκατομμύριο μετρήσεις με ακριβώς την ίδια πειραματική διάταξη ώστε να έχουμε μια μέτρηση που **να μη συμφωνεί** με την αναμενόμενη τιμή των 100.0°C. Αυτό προφανώς είναι απίθανο, οπότε συμπεραίνουμε ότι οι δύο τιμές δεν συμφωνούν μεταξύ τους, πράγμα που σημαίναι ότι είτε η αναμενόμενη τιμή είναι λάθος, είτε ότι οι συνθήκες του πειράματος δεν είναι ιδανικές (π.χ. το νερό περιέχει προσμίξεις από άλατα).

Συνήθως θεωρούμε ότι κάποια μέτρηση συμφωνεί με την αναμενόμενη τιμή εάν απέχουν έως και 3 τυπικές αποκλίσεις.

[1] Η απόδειξη είναι πέρα από τους στόχους αυτής της εισαγωγής. Ομως μια πολύ καλή παρουσίαση βρίσκεται στο βιβλίο των Bevington & Robinson.

Μετάδοση σφαλμάτων

Μέχρι στιγμής είδαμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια σειρά μετρήσεων προκειμένου να εκτιμήσουμε την πραγματική τιμή ενός μεγέθους και την ακρίβεια με την οποία τη γνωρίζουμε. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή και το σφάλμα μιας παράγωγης ποσότητας που υπολογίζεται από τις μετρήσεις μας (για παράδειγμα ο όγκος μιας σφαίρας όπως υπολογίζεται από τη διάμετρό της).

α. Πιθανό Σφάλμα

Ας θεωρήσουμε ότι μετράμε ένα μέγεθος και το σφάλμα του (α±δα), και ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα μέγεθος β που συνδέεται με το α μέσω της σχέσης β=f(α), καθώς και το σφάλμα του δβ. Η τιμή του β που θα αντιστοιχεί στη τιμή α θα είναι f(α). Αντίστοιχα οι τιμές του β που θα αντιστοιχούν στις ακραίες τιμές του α με βάση το σφάλμα του (α-δα και α+δα) θα είναι β_1= f(α-δα) και β_2= f(α+δα). Τότε το σφάλμα του β θα είναι δβ = β_2 –β = f(α+δα) – f(α). Εάν πάρουμε το λόγο του δβ με το δα θα

έχουμε: $\dfrac{\delta\beta}{\delta a} = \dfrac{f(a+\delta a) - f(a)}{\delta a}$

ή στο όριο που το δα είναι πολύ μικρό (δα→0) έχουμε

$$\frac{\delta\beta}{\delta a} = \frac{f(a+\delta a) - f(a)}{\delta a} \approx \lim_{\delta a \to 0} \frac{f(a+\delta a) - f(a)}{\delta a} \equiv \frac{df}{da}$$

Επομένως $$\boxed{\delta\beta = \frac{df}{da}\delta a} \quad \textbf{(4)}$$

Δηλαδή το σφάλμα στην ποσότητα β ισούται με το σφάλμα της ποσότητας α επί την παράγωγο ως προς το α, της συνάρτησης που συνδέει τα δύο μεγέθη.

Για παράδειγμα στην περίπτωση που θέλουμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα στον υπολογισμό του όγκου μιας σφαίρας γνωρίζοντας την ακτίνα της (r±δr) αρκεί να πάρουμε την παράγωγο ως προς την ακτίνα της σχέσης που δίνει τον όγκο:

$$\delta V = \frac{dV}{dr}\delta r = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\delta r = 4\pi r^2 \delta r$$

Στην περίπτωση που η παράγωγος ποσότητα β εξαρτάται από περισσότερα του ενός μετρούμενα μεγέθη $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$, μέσω της σχέσης $\beta = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$, και υπό την προϋπόθεση ότι τα μεγέθη ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$,) δεν σχετίζονται μεταξύ τους η παραπάνω σχέση μπορεί να γενικευθεί ως εξής:

$$\boxed{\delta\beta^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\delta a_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\delta a_2\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial a_3}\delta a_3\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial a_n}\delta a_n\right)^2} \quad \textbf{(5)}$$

Αυτή είναι και η βασική σχέση που μας δίνει το σφάλμα μίας ποσότητας που υπολογίζεται με βάση άλλες μετρούμενες ποσότητες. Το σφάλμα αυτό ονομάζεται πιθανό σφάλμα.

Για παράδειγμα εάν θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου έχοντας μετρήσει τις πλευρές του (α±δα), (β±δβ) και (γ±δγ), το σφάλμα του όγκου (ο οποίος δίνεται από τη σχέση V=αβγ) θα είναι

$$\delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\delta a_1\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\delta\beta\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma}\delta\gamma\right)^2$$
$$= \left(\beta\gamma\ \delta a\right)^2 + \left(a\gamma\ \delta\beta\right)^2 + \left(a\beta\ \delta\gamma\right)^2$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε τη συνεισφορά των επιμέρους μετρήσεων στο συνολικό σφάλμα της μετρούμενης ποσότητας.
Ειδικότερα εάν διαιρέσουμε το κάθε μέλος της παραπάνω σχέσης δια τον όγκο $V = \alpha\beta\gamma$ μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω σχέση συναρτήσει του σχετικού σφάλματος κάθε μεγέθους:

$$\left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\delta\beta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\delta\gamma}{\gamma}\right)^2.$$

β. Μέγιστο Δυνατό Σφάλμα

Μερικές φορές μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε ποιό είναι το μεγαλύτερο δυνατό σφάλμα που μπορεί να έχει μια παράγωγη ποσότητα. Ας θεωρήσουμε ότι θέλουμε να δούμε ποιό είναι το μέγιστο σφάλμα του αθροίσματος δύο μετρήσεων ((α±δα), και (β±δβ)). Οι μέγιστες τιμές που μπορούν να πάρουν οι ποσότητες α και β είναι (α+δα) και (β+δβ), επομένως η ανώτερη τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμά τους θα είναι (α+β+δα+δβ). Αντίστοιχα η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμά τους θα είναι (α+β – δα –δβ) = (α+β)-(δα+δβ). Επομένως το άθροισμα (α+β) κυμαίνεται μεταξύ (α+β)-(δα+δβ) και (α+β)+(δα+δβ). Αρα το μέγιστο σφάλμα του αθροίσματος (α+β) θα είναι το άθρισμα των σφαλμάτων του (δα+δβ).

$$\delta(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \sum_i \delta a_i$$
$$\delta(a_1 - a_2 - \cdots - a_n) = \sum_i \delta a_i$$

όπου δa_i είναι το σφάλμα της κάθε μέτρησης α_i.
Για σύγκριση με βάση τη σχέση (5) το πιθανό σφάλμα του αθροίσματος θα είναι

$$\delta(a+\beta) = \sqrt{\delta a^2 + \delta\beta^2}\ .$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το μέγιστο σφάλμα στην περίπτωση της αφαίρεσης δύο ποσοτήτων ισούται με το άθροισμα των σφαλμάτων τους.

Στην περίπτωση πολλαπλασιασμού το σφάλμα του γινομένου Γ=αβ (α,β ≠0) θα είναι

$$\delta\Gamma = (a \pm \delta a)(\beta \pm \delta\beta) = a\beta\left(1 \pm \frac{\delta a}{a}\right)\left(1 \pm \frac{\delta\beta}{\beta}\right) = a\beta\left[1 \pm \left(\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta\beta}{\beta}\right) \pm \left(\frac{\delta a}{a}\right)\left(\frac{\delta\beta}{\beta}\right)\right]$$

$$\cong a\beta\left[1 \pm \left(\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta\beta}{\beta}\right)\right]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση ότι ο όρος $\left(\frac{\delta a}{a}\right)\left(\frac{\delta\beta}{\beta}\right)$ είναι πολύ μικρός σε σχέση με τους υπόλοιπους.

Στη γενικότερη περίπτωση ν όρων έχουμε $\Gamma=\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ με

$$\delta\Gamma = a_1 a_2 \cdots a_\nu \left[1 \pm \left(\frac{\delta a_1}{a_1} + \frac{\delta a_2}{a_2} + \cdots + \frac{\delta a_\nu}{a_\nu}\right)\right]$$

Αντίστοιχα μπορούμε να υπολογίσουμε σχέσεις για το μέγιστο δυνατό σφάλμα στην περίπτωση διάιρεσης. Εστω ότι

$$\Gamma \pm \delta\Gamma = \frac{a \pm \delta a}{\beta \pm \delta\beta} = \frac{a}{\beta}\left(\frac{1 \pm \delta a/a}{1 \pm \delta\beta/\beta}\right)$$

Αναπτύσσοντας τον όρο $\left(1 \pm \delta\beta/\beta\right)^{-1}$ με βάση τον τύπο του διωνύμου έχουμε

$$\Gamma \pm \delta\Gamma = \frac{a \pm \delta a}{\beta \pm \delta\beta} = \frac{a}{\beta}\left[1 \pm \left(\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta\beta}{\beta} + O^2\right)\right]$$

όπου O^2 είναι όροι $2^{ης}$ τάξης και άνω οι οποίοι μπορούν να παραλειφθούν ως πολύ μικροί.

Επομένως $\Gamma \pm \delta\Gamma = \frac{a}{\beta}\left(1 \pm \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta\beta}{\beta}\right)$

Που έχει παρόμοια μορφή με τη μορφή της σχέσης για τον πολλαπλασιασμό.

Το μέγιστο δυνατό σφάλμα μας δίνει μια συντηρητική εκτίμηση του σφάλματος η οποία υπερεκτιμά το πραγματικό σφάλμα. Γι' αυτό το λόγο σε όλες τις περιπτώσεις θα χρησιμοποιούμε το πιθανό σφάλμα.

Α. 2. Γραφικές Παραστάσεις

Τις περισσότερες φορές όταν εκτελούμε ένα πείραμα μας ενδιαφέρει να βρούμε τη σχέση που συνδέει δυο φυσικά μεγέθη, είτε για να υπολογίσουμε κάποια χαρακτηριστική ποσότητα, είτε για να διερευνήσουμε το φυσικό νόμο που τα συνδέει. Για παράδειγμα, μετρώντας την απόσταση που διανύει ένα σώμα που κινείται χωρίς την επίδραση άλλων δυνάμεων συναρτήσει του χρόνου μπορούμε να αποδείξουμε ότι η απόσταση εξαρτάται γραμμικά από τον χρόνο. Επιπλέον από τη σταθερά αναλογίας μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος.

Ο καλύτερος τρόπος για να μελετήσουμε τη σχέση που συνδέει δύο μεγέθη είναι να παραστήσουμε γραφικά το ένα μέγεθος συναρτήσει του άλλου, δηλαδή να κατασκευάσουμε μια γραφική παράσταση.

Γραμμικές σχέσεις

Η πιό απλή περίπτωση σχέσης μεταξύ δύο μεγεθών (έστω y και x) είναι η γραμμική σχέση: $y = \alpha x + \beta$

το διάγραμμα της οποίας θα είναι μια ευθεία γραμμή.
Σε αυτή την περίπτωση το x λέγεται **ανεξάρτητη μετραβλητή** και το y λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή,** αφού η τιμή του εξαρτάται από την τιμή του x. Το α είναι η **κλίση της ευθείας**, ενώ το β είναι η τεταγμένη του σημείου που τέμνει η ευθεία τον άξονα yy′ (δηλαδή η απόστασή του από το σημείο y=0) και ονομάζεται **διατομή της ευθείας**.

Για να βρούμε τις τιμές των α και β (οι οποίες χαρακτηρίζουν πλήρως την ευθεία) αρκεί να έχουμε μετρήσεις του y για διαφορετικές τιμές του x. Για παράδειγμα έστω ότι μελετάμε την ελεύθερη πτώση ενός σώματος. Η σχέση που συνδέει την ταχύτητά του (εξαρτημένη μεταβλητή) με το χρόνο (ανεξάρτητη μεταβλητή) είναι

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

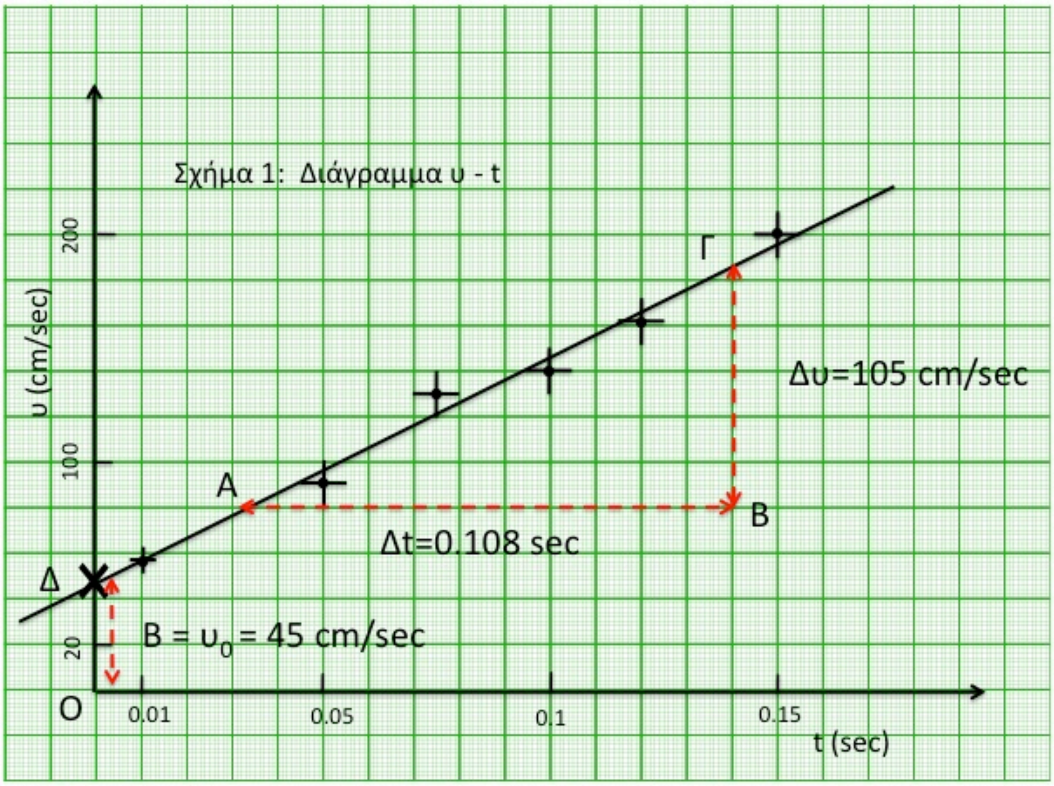
όπου υ είναι η στιγμιαία ταχύτητα, t είναι ο χρόνος από την έναρξη των μετρήσεων, α η επιτάχυνση της βαρύτητας, και υ_0 η αρχική ταχύτητα (τη χρονική στιγμή t=0 sec).
Επομένως για να βρούμε την επιτάχυνση της βαρύτητας αρκεί να πάρουμε μετρήσεις της ταχύτητας υ σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα t από τη έναρξη του πειράματος.
Μία τέτοια σειρά μετρήσεων φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 2: Πίνακας Μετρήσεων

t ($\times 10^{-2}$ sec)	1.0±0.2	5.0±0.5	7.5±0.5	10.0±0.5	1.2±0.5	1.5±0.5
υ (cm/sec)	58±5	90±10	130±10	140±10	160±10	210±10

Στο Σχήμα 3α φαίνεται το διάγραμμα της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου το οποίο κατασκευάστηκε απεικονίζοντας τα παραπάνω ζεύγη μετρήσεων σε ένα σύστημα αξόνων x-y το οποίο έχει βαθμονομηθεί κατάλληλα ώστε ο άξονας xx′ να αντιστοιχεί στο χρόνο και ο άξονας yy′ να αντιστοιχεί στην ταχύτητα. Σε κάθε μέτρηση φαίνονται και τα **αντίστοιχα σφάλματα στη ταχύτητα και το χρόνο τα**

οποία έχουν απεικονιστεί ως ευθύγραμμα τμήματα μήκους ίσου με το μέγεθος του σφάλματος.



Σχήμα 3α. Παράδειγμα Γραφικής Παράστασης με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 2.

Επίσης φαίνεται και η ευθεία **η οποία έχει χαραχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε η απόσταση της από το κάθε σημείο να είναι η μικρότερη δυνατή.**

Παρατηρούμε ότι τα πειραματικά σημεία δεν βρίσκονται ακριβώς πάνω στην ευθεία, αλλά έχουν μικρές αποκλίσεις εκατέρωθεν της ευθείας. Αυτό είναι αναμενόμενο δεδομένου ότι οι μετρήσεις έχουν σφάλματα τα οποία τις κάνουν να αποκλίνουν από τις πραγματικές τιμές. Παρατηρούμε όμως και ότι κανένα σημείο δεν απέχει από την ευθεία περισσότερο από το σφάλμα της αντίστοιχης μέτρησης. Αυτό είναι μια καλή ένδειξη για την ποιότητα των μετρήσεων.

Από το τρίγωνο ΑΒΓ μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση της ευθείας (δηλαδή την ταχύτητα) ως

$$\alpha = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{105 cm/\sec}{0.108\sec} = 972.2 cm/\sec^2$$

Η απόσταση ΟΔ ισούται με τη διατομή της ευθείας και μας δίνει την αρχική ταχύτητα του σώματος. Το γεγονός ότι η διατομή είναι μη μηδενική σημαίνει ότι το σώμα είχε κάποια αρχική ταχύτητα τη στιγμή t=0 sec.

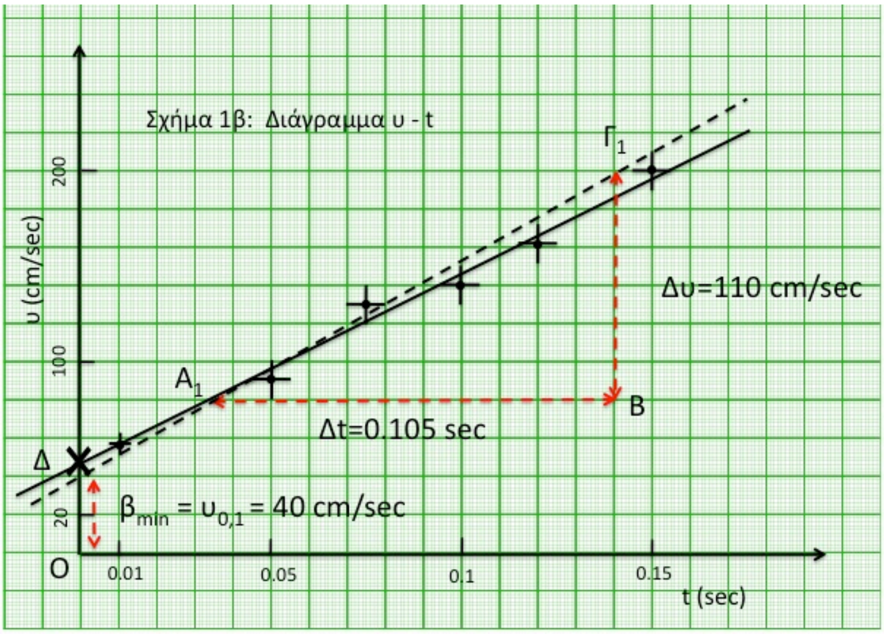
Το σφάλμα της κλίσης μπορεί να υπολογιστεί χαράζοντας δύο ακόμα ευθείες, που θα αντιστοιχούν στις ευθείες με τη μικρότερη (α_{min}) και μεγαλύτερη (α_{max}) κλίση:

$$\alpha_{\max} = \frac{\mathrm{B\Gamma_1}}{\mathrm{A_1B}} = \frac{110 cm/\sec}{0.105\sec} = 1047.6 cm/\sec^2$$

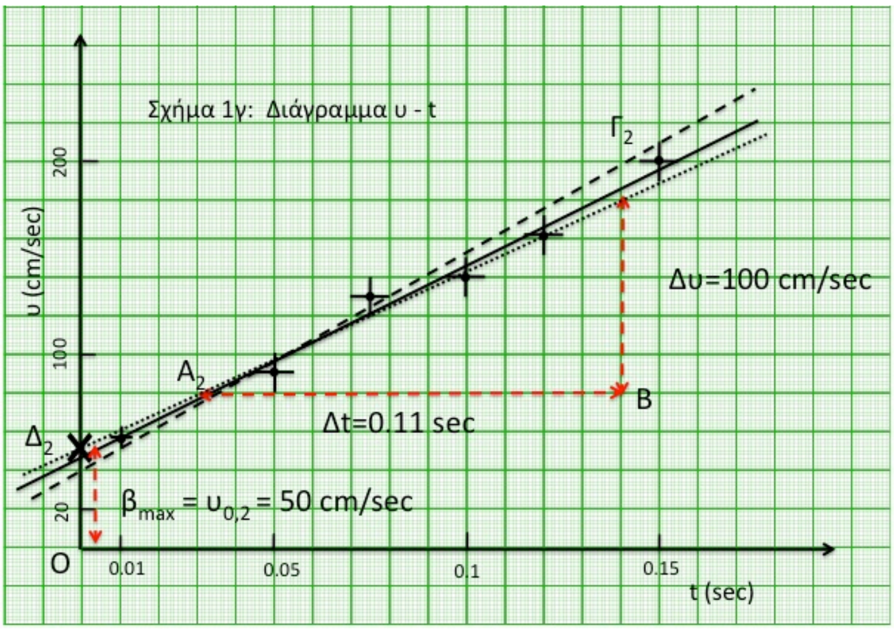
και $$\alpha_{min} = \frac{B\Gamma_2}{A_2B} = \frac{100cm/\sec}{0.11\sec} = 909.1cm/\sec^2$$

Τότε το σφάλμα της κλίσης θα είναι δα=|α_{min} - α_{max}|/2 = 69.25 ≈70 cm/sec^2. **Επομένως α=(970±70)cm/sec^2 ή (97±7)×10 cm/sec^2** λαμβάνοντας υπ' όψιν τους κανόνες για τα σημαντικά ψηφία.

Αντίστοιχα η διατομές των δύο αυτών ευθειών θα μας δώσουν το σφάλμα της διατομής δβ=| β_{max} - β_{min}|/2 = =| 50 – 40 |/2 = 5 cm/sec^2. **Επομένως β=(45±5)cm/sec.**



Σχήμα 3β. Παράδειγμα Γραφικής Παράστασης με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 2. Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει την ευθεία με τη μεγαλύτερη κλίση.



Σχήμα 3γ. Παράδειγμα Γραφικής Παράστασης με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 2. Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει την ευθεία με τη μεγαλύτερη κλίση από το σχήμα 3β, ενώ η διάστικτη γραμμή δείχνει την ευθεία με τη μικρότερη κλίση.

Μη Γραμμικές σχέσεις

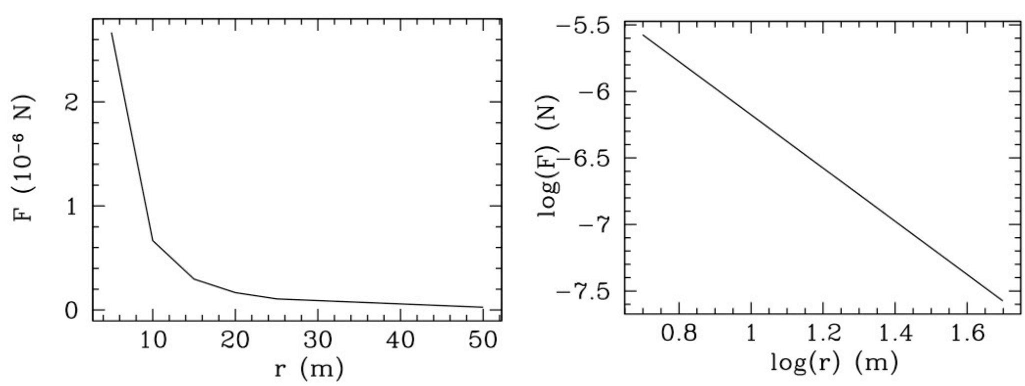
Στην περίπτωση μη γραμμικών σχέσεων όπως για παράδειγμα νόμοι δύναμης ($y = Ax^b$) ή εκθετικοί νόμοι ($y = Ae^b$), προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους τους (δηλαδή τις τιμές των Α και b) θα πρέπει πρώτα να τις γραμμικοποιήσουμε.

Στην περίπτωση των νόμων δύναμης η γραμμικοποίηση γίνεται λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη. Τότε έχουμε:

$$y = Ax^b \Leftrightarrow \log y = \log\left(Ax^b\right) \Leftrightarrow$$
$$\log y = \log A + b\log x$$

Επομένως εάν παραστήσουμε γραφικά το $\log y$ συναρτήσει του $\log x$, τότε από την κλίση της ευθείας έχουμε τον εκθέτη b, ενώ από τη διατομή μπορούμε να υπολογίσουμε τον παράγοντα Α.

Αυτή η μέθοδος για παράδειγμα εφαρμόζεται εάν θέλουμε να δούμε με ποιό τρόπο εξαρτάται η ελκτική δύναμη μεταξύ δύο γνωστών μαζών από την απόστασή τους. Το πείραμα που θα κάναμε σε αυτή την περίπτωση θα ήταν να πάρουμε δύο γνωστές μάζες, και να μετρήσουμε την ελκτική τους δύναμη για διαφορετικές αποστάσεις. Οπως γνωρίζουμε από το Νόμο της Παγκόσμιας Ελξης η σχέση αυτή είναι μη γραμμική ($F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$), επομένως εάν κάνουμε το διάγραμμα της δύναμης συναρτήσει της απόστασης (F-r) θα πάρουμε μια καμπύλη (Σχήμα 4) η οποία δεν μας επιτρέπει την εκτίμηση της δύναμης στην οποία είναι υψωμένη η απόσταση. Αντίθετα εάν κάνουμε το διάγραμμα $\log F$ συναρτήσει του $\log r$, θα έχει τη μορφή ευθείας η κλίση της οποίας θα ισούται με τη δύναμη που είναι υψωμένη η απόσταση (b=-2), και η διατομή της θα ισούται με $\log(Gm_1 m_2)$ (Σχήμα 4).
Διαγράμματα αυτής της μορφής ονομάζονται λογαριθμικά.



Σχήμα 4: Διάγραμμα της δύναμης συναρτήσει της απόστασης (αριστερά) και του λογάριθμου της δύναμης συναρτήσει του λογάριθμου της απόστασης (δεξιά). Προφανώς το λογαριθμοκό διάγραμμα είναι πιο εύχρηστο για τη μελέτη της συσχέτισης των δυο μεγεθών.

Στην περίπτωση εκθετικών νόμων η γραμμικοποίηση γίνεται παίρνοντας το φυσικό λογάριθμο και των δύο μελών:

$$y = Ae^{b} \Leftrightarrow \ln y = \ln\left(Ae^{b}\right) \Leftrightarrow$$
$$\ln y = \ln A + bx$$

Επομένως κάνοντας το διάγραμμα $\ln y$ συναρτήσει του x μπορούμε από την κλίση να υπολογίσουμε τη δύναμη b και από τη διατομή τον παράγοντα $\ln A$.

Σχέσεις τέτοιας μορφής περιγράφουν πολλά φυσικά φαινόμενα, όπως τη μεταβολή του πλάτους σε μια αποσβενύμενη ταλάντωση, την απορρόφηση ακτινοβολίας, τον αριθμό των αδιάσπαστων πυρήνων ενός ραδιενεργού υλικού, κ.α. Διαγράμματα αυτής της μορφής ονομάζονται **ημιλογαριθμικά,** καθώς ο άξονας της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι γραμμικός.

Κανόνες για την κατασκευή διαγραμμάτων

Για τη κατασκευή σωστών γραφικών παραστάσεων που περιέχουν όλες τις απαραίτητες πληροφορίες θα πρέπει να ακολουθείται η εξής διαδικασία:

1. Πρώτα χαράσουμε τους άξονες. Οι άξονες θα πρέπει να απέχουν από τα όρια της σελίδας ώστε να υπάρχει περιθώριο για τη βαθμονόμηση και την περιγραφή τους.
2. Βαθμονομούμε τους άξονες. Η βαθμονόμηση θα πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιούμε όλη τη επιφάνεια του χαρτιού. Εάν οι τιμές των πρώτων μετρήσεων απέχουν πολύ από το 0, τότε η βαθμονόμηση μπορεί να αρχίσει από μια μεγαλύτερη τιμή.
3. Κάτω ή δίπλα σε κάθε άξονα σημειώνουμε σε ποιό φυσικό μέγεθος αναφέρεται καθώς και τις μονάδες μέτρησής του.
4. Τοποθετούμε τις μετρήσεις πάνω στο καρτεσιανό σύστημα που δημιουργήσαμε με τη βαθμονόμηση. Η κάθε μέτρηση σημειώνεται με μια τελεία. Δεν σημειώνουμε ούτε τις τιμές των μετρήσεων, ούτε την τεταγμένη ή την τετμημένη των σημείων πάνω στους άξονες.
5. Σε κάθε σημείο τοποθετούμε και το αντίστοιχο σφάλμα ως ένα ευθύγραμμα τμήματα εκατέρωθεν του σημείου με μήκος ίσο με το μέγεθος του σφάλματος.
6. Σχεδιάζουμε την καλύτερη ευθεία (ή καμπύλη στη γενικότερη περίπτωση). Η καλύτερη ευθεία είναι αυτή ή οποία απέχει την ελάχιστη δυνατή απόσταση από το κάθε ένα σημείο. Προφανώς λόγω των σφαλμάτων τα σημεία των μετρήσεων δεν θα πέφτουν ακριβώς πάνω στην ευθεία.
7. Για τον υπολογισμό της κλίσης της ευθείας σχηματίζουμε ένα τρίγωνο (σχετικά μεγάλο) επιλέγοντας δυο απομακρυσμένα σημεία (x_1,y_1) και (x_2,y_2) επί της ευθείας (Σχήμα 3). Τα σημεία αυτά δεν θα πρέπει να αντιστοιχούν σε μετρήσεις. Από το λόγο των πλευρών του τριγώνου έχουμε όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως ότι η κλίση της ευθείας θα είναι:
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
8. Η διατομή της ευθείας δίνεται από την τεταγμένη του σημείου που τέμνει τον άξονα yy′. Εάν η βάθμονόμηση του άχονα xx′ δεν έχει αρχίσει από το 0 τότε η τεταγμένη δεν μπορεί να υπολογιστεί με αυτό τον τρόπο.
9. Σημειώνουμε σε ένα κενό μέρος του διαγράμματος τον τίτλο του.

Α. 3. Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι μπορούμε να βρούμε τις παραμέτρους μιας γραμμικής σχέσης από τη γραφική παράσταση των μεγεθών που εκφράζει. Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε μια μαθηματική μέθοδο η οποία θα μας δίνει αυτές τις παραμέτρους με βάση τις μετρήσεις μας. Η μέθοδος αυτή λέγεται **μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.**

Εστω ότι έχουμε Ν ζεύγη μετρήσεων (x_i,y_i) για δύο φυσικά μεγέθη X και Y. Εάν η σχέση μεταξύ των μεγεθών εκφράζεται από την εξίσωση $y = ax + b$, τότε οι τιμές των παραμέτρων a και b θα είναι αυτές για τις οποίες ελαχιστοποιείται η απόσταση της ευθείας από τα σημεία των μετρήσεων.

Η απόσταση του κάθε σημείου από την ευθεία είναι $s_i = y_i - (ax_i + b)$
όπου (x_i,y_i) είναι οι τιμές των μετρήσεων και $(ax_i + b)$ η τεταγμένη της ευθείας στο $x = x_i$.
Δεδομενου ότι το s_i μπορεί να πάρει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές, και προκειμένου να λάβουμε υπ’όψιν μας όλα τα σημεία παίρνουμε το άθροισμα των τετραγώνων των s_i για όλες τις μετρήσεις:

$$S = \sum_{i=1}^{N} s_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \left(ax_i + b \right) \right)^2$$

Η ευθεία η οποία περιγράφει καλύτερα όλα τα σημεία είναι αυτή για την οποία η ποσότητα S ελαχιστοποιείται. Δηλαδή τα ζητούμενα a και b είναι αυτά που ελαχιστοποιούν το S:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \left(ax_i + b \right) \right)^2 \right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \left(ax_i + b \right) \right)^2 \right) = 0$$

Από το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων μπορούμε να βρούμε τα a και b συναρτήσει των μετρήσεων (x_i,y_i):

$$a = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{N}}{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i \right)^2}{N}}$$

$$b = \frac{\sum y_i}{N} - a \frac{\sum x_i}{N}$$

όπου οι αθροίσεις γίνονται για όλες τις μετρήσεις.

Κατά τον υπολογισμό των παραπάνω σχέσεων δεν λάβαμε υπ’οψιν μας την ύπαρξη σφαλμάτων. Εάν οι μετρήσεις του y έχουν και σφάλματα τα οποία ακολουθούν την κανονική κατανομή τότε θα πρέπει να τα λάβουμε υπ’οψιν μας υπό τη μορφή συντελεστών βαρύτητας στον υπολογισμό του S. Εάν οι μετρήσεις είναι $\left((y_i \pm \sigma_i), x_i\right)$, τότε η σχέση για το άθροισμα των τετραγώνων S παίρνει τη μορφή:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2}{\sigma_i^2}$$

Δηλαδή μετρήσεις με μεγάλα σφάλματα δεν συνεισφέρουν σημαντικά στο άθροισμα S, και κατά συνέπεια δεν επηρεάζουν όσο οι άλλες μετρήσεις τον υπολογισμό των παραμέτρων της ευθείας. Ακολουθωντας την ίδια μέθοδο όπως παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση α και τη διατομή b συναρτήσει των μετρήσεων $\left((y_i \pm \sigma_i), x_i\right)$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Delta}\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}\right) \\ b &= \frac{1}{\Delta}\left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

όπου

$$\boxed{\Delta = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2}$$

Δεδομένου ότι τώρα έχουμε πληροφορίες και για την ακρίβεια των μετρήσεων μπορούμε να υπολογίσουμε και τα σφάλματα των παραμέτρων α και b.

$$\boxed{\begin{aligned} \delta a &= \sqrt{\frac{1}{\Delta} \sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \\ \delta b &= \sqrt{\frac{1}{\Delta} \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \end{aligned}} \qquad (6)$$

Λεπτομερής απόδειξη των παραπάνω σχέσεων μπορεί να βρεθεί σε βιβλία ανάλυσης πειραματικών μετρήσεων, όπως για παράδειγμα το Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, (Bevington & Robinson, Mc Graw Hill).

Στη παραπάνω ανάλυση θεωρήσαμε σφάλματα μόνο στην εξαρτημένη μεταβλητή y. Η ανάλυση για σφάλματα και στις δύο μεταβλητές είναι πιο πολύπλοκη και δεν θα μας απασχολήσει εδώ.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να γενικευθεί για πολυώνυμα n-βαθμού. Γενικά σε κάθε σειρά n μετρήσεων μπορεί να προσαρμοσθεί ένα πολυώνυμο n-2 βαθμού.

Επιπλέον με τον ίδιο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν εξισώσεις που δίνουν τους συντελεστές ελαχίστων τετραγώνων για καμπύλες που αντιστοιχούν σε νόμους δύναμης, εκθετικές ή λογαριθμικές εξισώσεις κ.λ.π.

Στα εργαστήρια, θα μας απασχολήσουν μόνο γραμμικές σχέσεις, όμως οι γενικότερες εξισώσεις ελαχίστων τετραγώνων για μη γραμμικές σχέσεις μπορούν να βρεθούν σε βιβλία ανάλυσης πειραματικών μετρήσεων.

Βιβλιογραφία

Χαλδούπης Χ., Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής, Μηχανική-Θερμότητα, Ηράκλειο 1977

Bevington P. R. & Robinson D. K., Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, Mc Graw Hill, 1992